NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
33 A
33

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

14-20.A.6

54.
65.

[illegible] [illegible]

EVCLIDES
RESTITVTVS
Denuò limatus,

Siue

PRISCA GEOMETRIÆ
ELEMENTA
Breuiùs, & faciliùs contexta

In quibus præcipuè

PROPORTIONVM THEORIÆ
noua firmiorique Methodo
proponuntur.

Editio tertia, cui ſubſequuntur Apollonij Elementa conica, atque Archimedis opera breuiori methodo demonſtrata.

Bib: Sec: Coll. Rom. Soc: J.

A IO. ALPHONSO BORELLIO

BIBLIOTECA NAZ ROMA VITTORIO EMANUELE

ROMÆ,

Ex Typographia Maſcardi, 1679.

Superiorum permiſſu.

Imprimatur ſi videbitur Reuerendiſs. P. Mag. Sac. Pal. Apoſt.

I. de Angelis Archiep. Vrbinat. Viceſg.

Imprimatur,

Fr. Raymundus Capiſuccus Ord. Præd. Sac. Pal. Apoſt. Magiſt.

ILLVSTRISSIMIS DOMINIS

PARMENSIS COLLEGII CONVICTORIBVS

ALEXANDER FALCONERIVS FELICITATEM.

CORONANDOS eſſe Fontes ab eo qui aquas indè hauſerit, Veteris oraculi vox eſt: qua quidem quantum vobis, nobiliſsimi ſodales, quantum clariſsimo Viro Domino Alphonſo Borellio Præceptori meo debeam, apertè ſatis admoneor. Veſtro contubernio ſumma cum animi mei voluptate atque vtilitate plures annos vſus, à vobis omnis elegantiæ ac ſapientiæ exempla habui. A veſtro deinde Collegio digreſſus, eum in Mathematicis diſciplinis Magiſtrum habui, qui breuitate ac claritate docendi iucundam æquè

BIBLIOTECA ROMA VITTORIO EMAN

mihi atque vtilem redderet operam ſuam Sapientum omnium approbatione laudatiſsimam. En igitur cum vobis cum illi ad gratam aliquam memoris animi ſignificationem exhibendam obſtringi me ſentiam, duos (vt vetus habet verbum) vna fidelia parietes dealbo, duo ſimul conor debita expungere. Eruditiſſimi Viri Opus in Euclidis Elementa iterata iam emiſsione iudicijs publicis probatum, noua curanda editione illuſtrare ſtudui: Hanc ipſam vobis pro meo erga Vos ſtudio, tanquam pignus demiſſæ ac perpetuò obſequioſiſſimæ Voluntatis dicare, ac conſecrare conſtitui. Ea eſt Indolis veſtræ Generoſitas, vt munus hoc, etſi foret infra dignitatem veſtram, benignè tamen admiſſuros vos ac gratiam, quæ illi deeſset, ex indita vobis humanitate ſuppleturos confidere potuerim. Eſt igitur, cur id facilius mihi perſuadeam cum ſingularis præſtantię librum eſſe ſciam à

lau-

laudatiſsimo ſcriptore elucubratum, cumque de eo tractet argumento, quod ingenijs veſtris apprimè arridere debeat; Communis enim vobis eſt cum reliqua Europæ Nobilitate Amor ac ſtudium in nobiliſſimam hanc Philoſophiæ artem, quæ hac noſtra ætate in ipſis Regum, ac Principum Virorum Aulis, atque in priuatis Eruditorum penetralibus excipi benignius conſueuit. Accipite ergo illum tamquam publicam teſseram æterni mei Amoris atque obſequij Erga iſtud toto iam Orbe celleberimum Collegium, & me, ac bonas artes, vt ſoletis, amate. Valete.

EV-

EVCLIDES RESTITVTVS

A IO. ALPHON. BORELLIO

NEAPOLITANO

Editio tertia denuo limata.

AD LECTOREM GEOMETRAM.

SICVT antiquitus licuit, & iuuit prima Geometriæ Elementa à priſcis Ægyptijs tradita a Thalete, Hippia, Pythagora, & pluribus alijs ante, & poſt Euclidem ſemper nouis inuentis corrigere, locupletare, imare, & noua forma & ordine, atque methodo demonſtratiua immutare. Sic quoque mihi licebit, ſeruata antiquitatis reuerentia, iterum Elementa Geometriæ in nouam formam clariorem, aliquibus etiam in locis firmiori modo contextam reſtituere.

Et primo breuiter innuam rationes, quæ ſuaſerunt vacillantes aliquas partes Geometriæ reformare.

Vacillat quippe Geometria in Doctrina parallelarum, & Proportionum: quia nimirum procedunt ex Principijs non omnino certis, & euidentibus. Et hoc in prima huius reſtitutionis editione ſatis prolixe oſtenſum eſt in ſcholijs, cuius Doctrinæ hic afferam breuem, & claram notitiam, & inſuper aliqua de nouo ſuperaddam.

Cum

Cum ſcientia ſit certa, & euidens cognitio rerum; & ſcientia ſit progreſſus Intellectualis ex notis ad ignota; procul dubio principia ex quibus ignotæ concluſiones deduci debent, oportet, vt ſint notiora illis: at nemo notiſſimum reputabit illud quod non percipitur, an verum ſit & an dari in rerum natura queat. Modo Parallelarum Doctrinam ab Euclide traditam imperfectam eſſe cenſuerunt, Poſſidonius, Geminus, & alij ob defectum Principiorum ſcilicet ob imperfectionem definitionis Parallelarum, & Petitionis quintæ. Dixit enim Euclides *duas rectas lineas in eodem plano exiſtentes, quæ non concurrunt ad vtraſque partes, licet in infinitum producantur, eſſe Parallelas*. Talis namque paſſio ignota eſt; tum quia ignoramus, an tales lineæ infinitæ non concurrentes reperiri poſſint in natura; tum etiam quia infiniti proprietates percipere non poſſumus, & proinde non eſt euidenter cognita.

Non minus ignota eſt Definitio Parallelarum a Poſſidonio excogitata, dixit enim *parallelas eſſe duas illas rectas, quæ æquali interuallo ſemper inter ſe diſtant*. Ignoratur enim quid nomine *interualli* intelligi debeat, & an verificari poſſit talis conditio, ſcilicet, an dari poſſint huiuſmodi rectæ lineæ, quæ ſemper æquali interuallo a ſe inuicem diſtent in illa extenſione infinita.

Pariter Ptolomæus Proclus & alij Petitionem quintam Euclidis è numero Principiorum reiicierunt, quæ talis eſt. *Si in duas rectas lineas in eodem plano exiſtentes, tertia incidens duos angulos internos ad eaſdem partes cōſtitutos minores duobus angulis rectis, fecerit, lineæ illæ concurrent ad partes, vbi anguli duobus rectis minores ſunt*. Talis quippe Petitio cognita non eſt lumine naturæ, & ideo erit Principium ignotum. Adde quod Annuere duas rectas coincidentiæ certum ſignum non eſt; cum dari queant lineæ, que annuunt, & nunquam coincidunt, vt Concoides, &

Aſimptoti. Erit igitur talis petitio Theorema, non Principium; quod non rite a Ptolemæo, & Proclo demonſtratum fuit: Ideo Arabes, & poſtea Clauius firmiori progreſſu id ipſum demonſtrare conati ſunt ex antiqua parallelarum definitione: quæ cum ſit ignota, vt dictum eſt; ideo in hac reſtitutione Primo ponitur definitio Parallelarum, quæ eſt euidentiſſima. Certum enim eſt, ex Propoſitionibus 10. & 11. Primi Elementi in *tab.* 8. *fig.* 7. quod *duæ rectæ AB, CD in eodem plano exiſtentes poſſunt perpendiculariter eleuari ſuper eandem rectam EH; tunc quidem prædictas lineas AB, & CD voco inter ſe parallelas.* De quibus paſſio æquidiſtantiæ deinceps demõſtratur, & talis definitio procul dubio erit principium ſcientiæ; cum exponatur per paſſionem poſſibilem. & euidentiſſimam.

Pronunciatum poſtea quod præmitti debet id ipſum eſt quod Arabes, & Clauius aſſumpſerunt, nempe *tab.* 8. *fig.* 8. *Si recta AB perpendiculariter innixa ſuper rectam BC in puncto eius extremo B transferatur tranſuerſali motu in eodem plano vſque ad DC, & in motu eius non vacillet, ſed ſemper perpendicularis ſit ſuper BC; tunc puncti A fluxus AEB erit linea Recta*: quod patet ex eo quod omnia puncta in AED deſignabilia æqualibus interuallis (menſuratis nempe ab eadem perpendiculari AB) diſtant ab omnibus punctis rectæ BC; & ideo eius puncta ſe conſequuntur, & diſpoſita ſunt eodem ordine directo quem exigit fluxus breuiſſimus rectæ BC.

Secundus error qui in vulgatis Elementis irrepſit, & procul dubio ab aliquo alio textui Euclidis additus fuit, eſt, *diuerticulum Contingentiæ* a peripheria Circuli, & a recta linea eum contingente compræhenſum; quod angulum conſtituere Proclus cenſuit. At hoc falſum eſſe putant Magni Viri Vieta, Galileus, & omnes Neoterici Mathematici inſignes, quorum rationes hic non referam, cum ſufficiat hæc Vnica in prima editione

¶ 2 huius

huius reſtitutionis tradita. Conſtat ex anguli Definitione: *Inclinationem duarum linearum ſe tangentium in vno puncto essentiam anguli conſtituere.* Igitur ſi duæ lineæ, quæ in vno puncto conuenientes vnicam certam, & determinatam inclinationem non efficiunt, procul dubio angulum non conſtituent. Atqui talem eſſe diuerticulum contingentiæ ſic oſtendetur. *Tabu.* 8. *fig.* 9.

Sit polygonum *abcs* quod tangat recta *ea* in latere *au*, patet quod perimeter *abc* cum tangente *ca* non vnicam ſed tot inclinationes conſtituit quot ſunt eius latera, ſcilicet *bae*, *cbe*, *dge &c.* harum autem inclinationum nulla angulum conſtituit excepta poſtrema *bae*; quia quælibet alia vt lateris *cb* & *ea* caret concurſu linearum in vno puncto, ſine quo angulus eſſe nequit. Conſideretur modo *tab.* 8. *fig.* 10. Circulus ABC quem contingat recta horizontalis EA. quia circulus cenſetur eſſe polygonum compræhenſum ab infinitis lateribus; tot nimirum, quot ſunt puncta circumferentiæ eius, & hæc latera ob circumferentiæ curuaturam, diuerſimodè inclinata ſunt ad tangentem EA, ſcilicet puncti C inclinatio determinatur ab eius fluxu CG in directum continuato, qui fluxus per circuli tangentem dirigitur, quod ex ſcientia mechanica perſpicuè ſuadetur. Quia pila grauis R Innixa ſuper curuam A C in C perinde fulcitur à peripheria vel à ſemidiametro, D C, ac ſi inniteretur ſuper planum inclinatum tangentis G C: & proinde inclinatio puncti C peripheriæ ſuper planum E A erit eadem, quam habet angulus rectilineus EGC. Similiter inclinatio puncti peripheriæ B erit ea, quam habet angulus rectilineus EHB, qui minor eſt angulo EGC: & ſic vlterius omnia alia puncta deſignata in peripheria BA efficiunt diuerſas inclinationes cum tangente EA: ſemper inter ſe inæquales, & decreſcentes; & quia in curua CBA deſignari poſſunt infinita puncta; ergo peripheria CBA

cum tangente EA efficit infinitas rectilineas inclinationes inæquales inter ſe, & continenter acutiores, quouſque in puncto contactus A prorſus inclinatio deſtruatur, & annihiletur. Iam ex hiſce infinitis inclinationibus nulla aſſignari poterit, quæ ſit propria, & conſtitutiua anguli diuerticuli contingentiæ, duplici ratione: primo quia deficit concurſus in vno puncto, ſecundo quia quælibet earum efficit angulum rectilineum cum tangente EA; (& Proclus non veretur affirmare, quod angulus contingentiæ ſit minor quolibet angulo acuto rectilineo) talis ergo inclinatio ſemper minor eſt quacunque data inclinatione procedendo verſus contactum A: nec aſſignari poteſt poſtrema preter quam in ipſomet puncto contactus vbi nulla inclinatio datur, quandoquidem punctum A congruit cum tangente EA. Patet ergo propoſitum.

Tertius locus, qui in Elementis Geometriæ reſtitui debet, eſt ille qui agit de *Proportione*, & *Proportionalitate* cum toto libro Quinto Euclidis: Hunc plane omnes fatentur obſcuriſſimum eſſe, & ideo hanc geometriæ partem plerique reſtituere conati ſunt, ſed irrito conatu vt mox patebit.

Nemo ambigit quod talis obſcuritas non aliunde pendet quam ex defectu Principiorum aſſumptorum, nempe ex Definitionibus, quæ cum ſint Principia, & cauſæ ſcientiæ debent eſſe notiſſimæ, vt euidentiſſimam cognitionem producere poſſint. Quod vero Definitiones ab Euclide traditæ in Quinto Elementorum ſint obſcuriſſimæ, omnes vno ore fatentur. Triplici enim modo *proportionem*, & *proportionalitatem* definiuit Euclides, ſemel libro VII, vbi duorum numerorum proportionem definiuit, *reſpectum, quo antecedens eſt multiplex, vel pars aut partes conſequentis numeri*. & duos numeros ad duos alios eandem proportionem habere dixit, *quando antecedentes æque multiplices, vel eadem pars, aut eædem par-*

partes conſequentium fuerint. Et tales profectò definitiones ſunt certæ, & euidentiſſimè cognitæ, & proinde merito inter principia ſcientiæ connumerari poſſunt. At quia preter numeros, & preter quantitates inter ſe commenſurabiles, quæ ſe habent vt numerus ad numerum, dantur etiam quantitates inter ſe proſus *Incommenſurabiles*, quæ Aſſimetræ vocantur, in quibus adaptari non poſſunt illæ definitiones numerorum proportionalium; propterea coactus fuit Euclides tradere definitiones proportionis, & Proportionalitatis vniuerſaliores, quæ comprehenderent etiam aſſimetras quantitates. Hoc autem duplici modo preſtitit. Primo dicendo proportionem eſſe, *Reſpectum quemdam duarum magnitudinum quoad quantitatem pertinet*. Et Proportionem eſſe dixit *ſimilitudinem reſpectuum*. Poſtea videmus quod hiſce definitionibus non acquieuit Euclides (ſi tamen ab aliquo additæ non fuerunt) neque ſufficientes eas reputauit, imò neque eis vſus eſt in demonſtrationibus Propoſitionum eius libri V Sed ſuperaddidit nouam definitionem dicendo. *In eadem proportione esse prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum prima, & tertia æque multiplicia a secunda, & quarta æque multiplicibus (qualiscumque ſit hac multiplicatio) vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna excedant, vel vna æqualia sunt, ſi ea sumantur quæ inter se respondent*.

Hanc porro poſtremam definitionem perplexam, ignotam, & ideo reſpuendam eſſe, nemo inficiatur. Quia definitio ſcientifica debet euidentiſſimè exponere naturam rei definitæ per paſſionem poſſibilem, veram, primam, & notiſſimam, per quam definitum diſtinguatur a quolibet alio ſubiecto. At proprietas expoſita in adducta ſexta deffinitione ignoratur an in rerum natura dari poſſit; infinitæ enim illæ æque multiplices vna maiores, vel vna minores reliquis, non percipimus an dari in natura poſſint, & ideo igno-

ignoramus an talis paſſio vera ſit: & licet poſſibilis, & vera ſupponatur, obſcura eſt tamen ob infinitatem quam inuoluit: quomodo ergo erit euidentiſſima? Et quam ſcientificam certitudinem parere poterit? Erit igitur talis definitio potius Theorema, quod abſque demonſtratione admitti non poteſt; & ideo nouæ definitiones excogitandæ ſunt, quæ ſint euidenter cognitæ, vt inter principia ſcientiæ iure connumerari poſſint.

Quid vero antiqui cenſuerint, & an, & quomodo hanc præcipuam Geometriæ partem correxerint ob librorum penuriam ignoramus. Scimus tamen Arabes improbaſſe Euclidis methodum, vt refert Campanus: id ipſum tentauit Io: Baptiſta Benedictus, & alij Viri preclari vſque ad noſtra tempora, qui repudiata ſexta definitione Euclidis cenſent recipi debere definitiones tertiam, et quartam, in quibus declarari putant naturam proportionis, & Proportionalitatis per *reſpectum quendam quo ad quantitatem pertinet, & per ſimilitudinem reſpectus*; & reponunt inter axiomata ſeptem V. libri Propoſitiones a VII ad XIII. ex quibus paſſionem æque multiplicium definitionis ſextæ ſe demonſtraſſe ſuadentur; & hinc reliquas propoſitiones libri V. methodo Euclidiana oſtendunt.

In hac controuerſia quid ipſe ſentiam amore veritatis liberè exponam. Quia definitiones eſſe non poſſent principia ſcientiæ, ſcilicet non producerent euidentiſſimam cognitionem niſi intellectui conſtaret earum certitudo, & euidentia; at nemo euidenter percipere dicet illud quod exprimitur verbis obſcuris & ambiguis, ſed oportet vt ſint propria, clarè & expreſsè ſignificantia naturam paſſionis rei definitæ, quæ ad inſtar Iconis in Animo repreſentent Ideam illius, & quare & quomodo, diſtinguatur a qualibet alia. Videamus modo an tertiæ & quartæ definitionum lib. V. Euclidis hæc verba. *Mutua*

qua-

quædam habitudo, *& ſimilitudo reſpectuum quo ad quantitatem pertinet* habeant prædictas conditiones, Et ſanè particula illa *quidam* eſt vaga & indeterminata, quæ annexa *Reſpectui* declarat quod non ſit vnicus & ſingularis reſpectus, ſed multiplex, quorum illæ qui proportionem conſtituere debet non exprimitur, nec indicatur; ſicut qui dicit roſa eſt quidam Flos, ineptè Roſæ definitionem ſe tradidiſſe ſuadetur. Scimus poſtea quod voces ſimilitudinis quorundam reſpectuum ſunt genericæ & ſignificant non omnimodam identitatem, ſed conuenientiam aliquam partialem; & ideo indigent vlteriori declaratione, expreſſe indicando quænam habitudo ex illis pluribus proportionem conſtituat, & in quo conſiſtat talis ſimilitudo. & ſic paſſim ab Euclide, & Appollonio ſimilitudo linearum, & figurarum, tam planarum, quam curuarum, & ſolidarum definitur: non ſolis verbis *Similitudinis quoad quantitatem pertinet*, ſed expreſſe aſſignando partes, modos, & circumſtantias, in quibus conſiſtit talis ſimilitudo, exprimendo nempe quod ſimilitudo ſegmentorum circularium conſiſtit in æqualitate angulorum exiſtentium in eiſdem ſegmentis, & quod Polygonorum ſimilitudo conſiſtit in æqualitate omnium angulorum circa quos latera ſunt proportionalia; & ſic in reliquis.

Patet igitur quod non ſufficit dixiſſe Proportionem eſſe duarum Magnitudinum *Mutuum quemdam reſpectum* quoad quantitatem pertinet; & quod proportionalitas eſt *Similitudo eorumdem reſpectuum* Quia ſi ignoramus quis, & qualis ſit ille reſpectus, qui proportionem conſtituit ſcire non poſſumus quando *vnus quidam reſpectus* quoad quantitatem ſit ſimilis alteri *cuidam*. Hoc plane ab ipſo Euclidis contextu elicitur; ſi enim iudicaſſet quod natura Proportionalitatis omnium quantitatum exactè, & ſufficienter expoſita fuiſſet per hæc verba *Similitudo quorumdam reſpectuum quoad quantitatem*

 perti-

pertinet : Ergo etiam Proportionalitatem numerorum comprehendere debebat, & proinde ſuperfluus fuit exprimendo in quo conſiſteret talis ſimilitudo in numeris, dicendo, *antecedentes* eſſe debere *æque multiplices, vel eadem pars, aut eadem partes conſequentium* ; Cum ergo hæc definitio numerorum propor-lium ſit optima, & ſcientifica ; potius concedendum eſt illam Vniuerſalem definitionem mancam fuiſſe. Et quis quæſo negabit ſimiles reſpectus quoad quantitatem poſſe plures, & diuerſos eſſe; vt duæ quantitates quæ duabus alijs inæquales ſint inter ſe ſimilem reſpectum quo ad *inequalitatem* habent, ſiue minor ad maiorem, ſiue maior ad minorem conferatur, & ideo 2. ad 3. eumdem reſpectum quoad inæqualitatem habebit quam 5. ad 4. cum ſimiles ſint, quatenus ambo antecedentes inæquales ſunt ſuis conſequentibus. Similiter comparatio 4. ad 2, & 5. ad 3. ſimiles ſunt in *maioritate* cum ambo antecedentes maiores ſint ſuis conſequentibus, vel è contra ambo ſint minores. Non ſecus eumdem reſpectum in æqualitate exceſſus, aut defectus habet 3. ad 2. quam 9. ad 8. quia ſinguli antecedentes eodem exceſſu, vnitatis nempe, ſuperant ſuos conſequentes, & è contra hi ab illis deficiunt. At nulla ex his ſimilitudinibus proportionalitatem conſtituit. Igitur ſuperius tradita definitio eſt ambigua, fallax & apta ad producendam ignorantiam potius, quam certam, & euidentem ſcientiam.

Nec immunes ab hac cenſura ſunt aliqui viri preclari, qui aiunt ſufficere, vt tanta ſit *granditas* primæ magnitudinis reſpectu ſecundæ, quantam habet tertia reſpectu quartæ: nec vt alij aiunt oportere vt prima A eodem modo, ſeu nec magis, nec minus contineat vel contineatur à ſecunda B, quam tertia C continet, vel continetur à quarta D, nè dum in commenſurabilibus, ſed etiam in Aſſimetris. Nec illi qui aiunt antecedentes debere eſſe æquè multiplices conſequentium,

k

& præterea illas ſuperare exceſſibus *Similibus*. Vel dicendo quod prima non ſit prorſus Maior vel minor quam opus eſt vt ad ſecundam habeat reſpectum aut relationem *Similem* illi, quam tertia habet ad quartam. Nec quando aiunt eſſe debere differentiam inter primam & ſecundam *Similem* differentiæ inter tertiam, & quartam: omnia enim hæc bella verba ſunt ſinonima, quæ ne hilum quidem docent præter ignotam illam *quandam* reſpectuum *ſimilitudinem*, quam quid ſibi velit non percipimus; quia ſemper nos relinquunt in eadem ambiguitate, & obſcuritate, cum nunquam declarent, in quo nam conſiſtat illa *quædam Similitudo*, quæ proportionalitatem conſtituit. Seu in quo conſiſtat illa ſimilitudo granditatis, aut ſimilitudo exceſſuum vel defectuum; quæ enim norma aut trutina dignoſcere poſſumus quo modo aut quando antecedentes non ſunt maiores nec minores quam opus eſt vt ſimiles reſpectus habeant ad ſuos conſequentes? vel ſimiliter contineant aut contineantur ab iiſdem? Itaque velint nolint concedere debent in Aſſimetris proportionalibus proprietatem illam *Similitudinis quorumdam reſpectuum* eſſe obſcuram, incomprehenſibilem, & ideo immerito inter ſcientiæ preſtantiſſimæ principia reponi; quæ aliunde eſſe debent magis euidentia & certa, quam ſint propoſitiones quæ inde deduci, & demonſtrari debent.

Hinc agnoſcant quam prudenter Propoſitiones Euclidis 7. 8. vſque ad 13. Axiomata eſſe dicant. Si quidem ignoro quid nam ſit proportionalitas in Aſſimetris & neſcio an detur in Natura, quomodo ſcire poſſum, cui ſubiecto talis proportionalitas competat? Et quomodo diſtinguere poſſum magnitudines Proportionales a non Proportionalibus?

Itaque non video quomo admitti poſſit excuſatio Neoterici Authoris, qui poſtquam declarauit quomodo commenſurabiles magnitudines Proportionales *Similem* reſpectum habent inter ſe, ſubdit, id ipſum in Aſ-

ſime-

ſimetris exponi non *poſſe, nec debere*, quia modus quo antecedens continet conſequentem eſt inexplicabilis. Igitur ſi non *poteſt* carebimus vera definitione, & ignorata definitione Proportionalitatis incommenſurabilium nil de ipſis demonſtrari poterit, & proinde non dabitur eorum ſcientia. Si non *debet* declarari ergo profitentur ſe docere poſſe ſcientiam aſſimetrarum pro-tionū abſq; definitione earundem, ſcilicet abſq; præcognitione exiſtentiæ & quiditatis ſubiecti ſcibilis.

Simili modo aliam doctrinam proportionum laudare non poſſum, quia Primo loco Author eximius retenta Euclidis tertia definitione Proportionis addit nouam definitionem Proportionalitatis, dicendo, proportiones eſſe inter ſe *ſimiles*, vel *æquales* ſi habuerint *denominatores* æquales. Poſtea in progreſſu demonſtrationum non vtitur hac definitione, ſed ſemper deducit quod A ad B eandem rationem habet quam C, ad D ex memorata definitione quarta Euclidis obſcura; & imperfecta, dicendo quod quantitas prima A ita continet quantitatem ſecundam B, vel ab ea continetur, ſicut quantitas C continet aliam D, vel ab ea continetur. Inſuper permutat proportiones alternè licet ille multoties comparabiles non ſint, nempe diuerſorum generum. Præterea de aſſimetris proportionalibus altum ſilentium.

Ex his omnibus ſatis aperte conſtare videtur imperfectam eſſe methodum Arabum, & ſectatorum eiuſdem doctrinæ.

Reſtat modo expendenda ſpeculatio Doctiſſimi Authoris in ſua Matheſi vniuerſali tradita, qui noua forma declarare nititur librum V. Euclidis.

Primo reicit definitionem 6. Euclidis vt perplexam & non immediatam. Deinde ait Proportionem *Quoto* extimari debere, & Proportionalitatem probari ſi identitas, vel æqualitas *Quotorum*, ſeu *Valorum*, vel *Reſpectuum* oſtendatur. Supponit poſtea *fra-*

ctio-

ctiones numerorum & quantitarum Aſſimetrarum earumque deſignationes oſtendere, *valorem*, ſeu *denominatorem* Proportionis, nempe Quotus eſt antecedens reſpectu ſui conſequentis. Itaque ex eo quod A ad B ſit vt C ad D deducit quod fractio $\frac{A}{B}$ ſcilicet A diuiſum per B equalis eſt fractioni $\frac{C}{D}$ ſeu C diuiſo per D. Et hanc propoſitionem aſſumit loco definitionis, per quam omnia quæ in libro V. Euclidis continentur ſe demonſtraſſe ſuadetur.

At videat quæſo vir preclarus, quod licet Propoſitiones omnes, quas aſſumit ſint veræ in numeris, & in quantitatibus commenſurabilibus, tamen in rigore geometrico vſurpari non poſſunt vt principia euidentiſſima, cum ſint Theoremata, quæ poſſunt, & debent demonſtrari. Poſtea in Aſſimetris non percipitur euidenter quod dentur neque quid ſint fractiones, & eorum Valores, ſeu Quoti ſint antecedentes ipſorum conſequentium, cum nullus reſpectus concipi, aut explicari poſſit in illa infinitate partium, a qua talis reſpectus incommenſurabilis determinatur, nec quomodo diſtinguatur a quolibet alio.

Nec valet effugium quod fractiones incommenſurabilium quantitatum ſint quoque rationales, & numericæ, ſaltem potentia; cum hoc vniuerſaliter verum non ſit: Demonſtrabo enim infinitas proportiones irrationales dari poſſe, quæ non ſunt radices vllarum poteſtatum numericarum cuiuſlibet gradus.

Sit *tab.* 8. *fig* 11. Progreſſio I, A, A^2, A^3, A^4, A^5, continuè proportionalium cuius vna proportio A ad A^2 ſit incommenſurabilis erunt reliquæ omnes proportiones in eadem continua ſerie incommenſurabiles quoque. Intelligatur poſtea A eſſe vnitatem alterius progreſſionis nempe A^1, B, B^2, B^3, B^4, in eadem proportione A ad A^2, continuatæ. Et quia A ſibi ipſi æqualis eſt: ergo B æqualis eſt A^2, & B^2 equalis eſt A^3, & ſic vlteri-

terius. Et vt A ad B, ſeu ad A^2, ita erit A^2, ad B^2, erant autem A, & B incommenſurabiles, cum proportionales ſint incommenſurabilibus A, A^2, ſeu B. Igitur poteſtates A^2, & B^2, inter ſe quoque incommenſurabiles ſunt. Similiter A^3, B^3, incommenſurabiles erunt, & ſic quælibet aliæ eiuſdem gradus in infinitum.

Hinc conſtat falſum eſſe quod quælibet proportio irrationalis numerica cenſeri poſſit, & intercedat inter quantitates ſaltem potentia commenſurabiles, cum in ſupradictis progreſſionibus infinitis nunquam dignitates eiuſdem gradus commenſurabiles inter ſe ſint.

Et licet conſtaret quamlibet proportionem irrationalem eſſe aritmeticam, ob commenſurabilitatem dignitatum, ſeu potentiarum eiuſdem gradus, nunquam poſſet per demonſtrationem euinci quatuor quantitates irrationales habere eandem proportionem, niſi expreſſe oſtenderetur *cuius dignitatis* inter illas infinitas eſſent radices illæ propoſitæ irrationales. Hoc autem cum preſtari non poſſit vel ſaltem admitti non debeat ſine demonſtratione, fatendum eſt talem paſſionem radicum non perceptam, de qua ignoratur an ſit, conſtituere non poſſe definitionem ſcientificam

Et ſiquidem dari non poſſet euidens paſſio declarans naturam proportionalium Aſſimetrarum excuſabiles eſſent Viri Clariſſimi, qui obſcuras & coniecturales definitiones tradiderunt. At hoc preſtitum a me fuit ante triginta quinque annos.

Hoc quidem affirmabunt eruditi lectores, ſi legere dignentur definitiones III. Libri meæ reſtitutionis, in cuius nona declaràtur quando vna proportio *Aſſimetra* eſt Maior, vel minor proportione aliqua commenſurabili, ſiue numerica, vt in *Tabula III. Fig.* 23. ſi C, & D fuerint commenſurabiles inter ſe, ſcilicet ſi C fuerit quælibet partes ipſius D vt Verbi gratia tres quartæ, centumeſ

da-

dari poſſe magnitudinem E quæ ſit $\frac{3}{4}$ ipſius B, & inſuper dantur innumerabiles magnitudines incommenſurabiles ipſi B quæ maiores ſint quam E, ſit hæc magnitudo A erit igitur A maior quam $\frac{3}{4}$ ipſius B. & tunc voco prop-nem Aſſimetram A ad B *maiorem prop-ne commenſurabili C ad D*. Similiter diminui poteſt A vt ſit minor quam $\frac{3}{4}$ ipſius B; dummodo A decurtata ſit incommenſurabilis ipſi B, & tunc voco prop-nem aſsimetram A ad B *minorem propor-ne commenſurabili quam habet C ad D*. Et talis æquidem paſsio nedum eſt poſsibilis, ſed etiam euidenter cognita, expreſſa vocibus non ambiguis, ſed clarè ſignificantibus naturam ſubiecti definiti: & proinde talis definitio erit perfecta, & principium ſcientiæ.

Poſtea in definitione decima *tab. III. fig.* 24. comparando quatuor quantitates, quarum binæ quæque eiuſdem generis ſint inter ſe incommenſurabiles: vt ſi A, & B ſint Aſſimetræ, pariterque C, & D; certum eſt dari poſſe tertiam proportionem commenſurabilem, vt E ad F, quæ ſit Verbi gratia ſexquitertia, tunc ſi proportio Aſsimetra A ad B fuerit maior, quam numerica E ad F, verum proportio C ad D irrationalis quoque ſit minor eadem rationali proportione E ad F, ſcilicet ſi A fuerit maior quam $\frac{4}{3}$ ipſius B, verum C fuerit minor quam ſexquitertia alterius D. Tunc vocatur Aſſimetra proportio A ad B *maior proportione incommenſurabili* quam habet C ad D.

Et hæc quoque paſſio eſt poſſibilis clara, & euidens; quia datis tribus quantitatibus, quarum prima ſit maior ſecunda, & tertia minor ſit eadem ſecunda, lumine naturæ percipimus primam quantitatem maiorem eſſe tertia.

Similiter in definitione vndecima *tab. III. fig.* 25. ſi earundem irrationalium quatuor quantitatum proportio primæ ad ſecundam minor fuerit, & ratio tertiæ ad quartam ſit maior

EVCLIDIS RESTITVTI A IOANN. ALPHONSO BORELLIO.

LIBER I.

PROOEMIVM.

GEOMETRIA, precipua inter diſciplinas mathematicas, magnitudines conſiderat; atque vniuerſa ſpeculatio ſcientifica, quæ de tali ſubiecto fieri poteſt, verſatur, aut in contemplatione rationis ſtructuræ, qua magnitudines formatæ ſunt; aut in contemplatione proprietatum eſſentialium & paſſionum earundem magnitudinum. Cumque aliquæ magnitudinum ſtructuræ, atque paſſiones, ſint adeò faciles & euidentes, vt nedum nullam prorſus laborioſam inquiſitionem requirant; ſed nemo ſanæ mentis eis aſſenſum negabit: aliæ verò ſint adeò reconditæ & difficiles, vt nullo pacto concedi poſſint: ſitque innata nobis

via à notioribus ad ignota procedendi (cùm omnis doctrina intellectiua ex præexiſtenti, ſeu anticipatà cognitione fiat) debent euidentes conſtructiones, & paſſiones magnitudinum aſſumi vt principia, ex quibus ſcientificè diſcurrendo aliæ abſtruſæ & difficiles conſtructiones, & paſſiones venentur.

Attamen, ſiue faciles, ſiue difficiles ſint huiuſmodi contemplationes, ſemper nuncupari conſueuerunt propoſitiones; eo quod in qualibet earum aliquid contemplandum proponitur intellectui.

Patet ergo principia Geometriæ eſſe *Propoſitiones*, exponentes facilem rationem ſtructuræ qua magnitudines formantur; aut facilem & euidentem proprietatem, vel paſſionem earundem magnitudinum.

Et quoniam ſæpenumero magnitudines, habentes euidentiſſimam conſtructionem aut paſſionem, non habent proprium nomen; aut habent nomina æquiuoca, res diuerſas ſignificantia: propterea, vt quælibet magnitudo diſtinguatur à qualibet alia, nomen ipſi imponi debet, aut exponi germana nominis ſignificatio. Quapropter principiorum Geometriæ tria genera erunt.

Primum vocatur *Definitio* in qua declaratur ſeu imponitur nomen alicui magnitudini, quæ habeat euiden-

dentiſſimam conſtructionem aut paſſionem: & talis conſtructio aut paſſio debet eſſe nedum vera, prima & notiſſima omnium quæ illi ſubiecto competunt; ſed etiam debet exponi clarè verbis non ambiguis, nec obſcuris: nam ſi hiſce conditionibus careret non produceret certiſſimam & euidentem ſcientiam, ſed potius coniecturalem & dubiam opinionem.

Secundum, in quo magnitudinis, cuius nomen impoſitum & vſu receptum eſt, exponitur aliqua euidens eius constructio: Et vocatur *Petitio*.

Tertium, in quo magnitudinis, iam nominatæ, exponitur euidens eius proprietas, aut aliqua manifeſta eius paſſio; & vocatur *Dignitas*, vel *Axioma*, aut *Pronunciatum*, ſiue communis notitia.

Et quoniam huiuſmodi Principia demonſtrari nequeunt, cùm ſint notiſſima; propterea tantummodo eorũ catalogus in veſtibulo huius ſcientiæ apponetur; vt poſtea, demonſtratiuè ſyllogizzando, ex eis deducantur veritates aliarum Propoſitionum reconditarum; quæ pariter ſubdiuiduntur. Propoſitio itaque difficilis, in qua contemplatur ratio ſtructuræ qua magnitudo aliqua formatur, vocabitur *Problema*: Illa verò Propoſitio abſtruſa, in qua con-

templatur proprietas vel paſſio aliqua magnitudinis, vocatur *Theorema*.

DEFINITIONES.

I. CORPORIS *extremitates, nullam profunditatem habentes, vocentur* Superficies.

In Figura prima, Tabulæ primæ Facies ABCD longa & lata profunditate carens vocatur ſuperficies.

II. SVPERFICIEI *extremitates, nullam latitudinem habentes, vocentur* Lineæ.

III. LINEAE *extremitates, nullam longitudinem habentes, vocentur* Puncta.

Licet ſuperficies, linea & puncta non reperiantur ſeparata à corporibus; certum eſt tamen verè exiſtere in natura, & per abſtractionem poteſt vna ſine altera conſiderari.; quia in quolibet corpore id quod tangitur & conſpicitur eſt ſola externa ſuperficies; & quando id vertitur circa ſe ipſum, aliquid quieſcens in eo reperitur, quod non erit corpus, cum integrum corpus moueatur rotando. Ergo pars immota erit ſimplex linea quę erit indiuiſibilis; cuius termini erunt Puncta. Patet ergo quod linea ex fluxu puncti generari poteſt; ſuperficies verò ex fluxu lineæ tranſuerſali; atque corpus ex fluxu ſuperficiei tranſuer-

ſuerſali gigni poteſt. Quæ tres ſpecies quantitatis continuæ poſſunt concipi infinitæ, ſi nimirum fluxus per infinitum ſpatium continuari intelligatur.

LINEAM autem omnium breuiſſimam earum, quæ à puncto ad punctum extendi poſſunt, Rectam *voco.* Tabula prima Fig. 2. IV.

SVPERFICIES, cui omni ex parte recta linea congruit, Plana *vocetur.* Tabula prima Fig. 3. V.

QVANTITAS inclinationis duarum rectarum linearum, in plano ſe mutuò tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram, vocetur Angulus Planus. Tab. I. fig. 4. VI.

Si duæ rectæ lineæ AB, AC ſe mutuo tangant in A & non ſint in directum conſtitutæ, voco *Angulum planum*, non extenſionem linearum BAC, nec ſpatium ab eis, comprehenſum; nec relationem vnius ad alteram, ſed illam tantam determinatamque flexionem ſeu inclinationem lineæ AC verſus AB.

SVPERFICIES plana ſub vno, vel aliquibus terminis comprehenſa, Figura *vocetur, vt ſunt A, & B.* Tab. I. Fig. 5. VII.

FIGVRA, quæ deſcribitur ex reuolutione rectæ lineæ finitæ in plano, circa alterum eius punctum extremum quieſcens, quouſque ad eum locum redeat, à quo moueri cœperat, vocetur VIII.

dem, vel æqualium, ſunt pariter æqualia.

VII. *SI eadem magnitudo metiatur duas magnitudines, & earum compoſitum, atque differentiam menſurabit*: Tabula I. Fig. 11.

VIII. *TOTVM ſua parte maius eſt.*

IX. *TOTVM æquale eſt omnibus ſuis partibus; ſimul ſumptis.*

X. *QVAE ſibi mutuò congruunt, ſunt æqualia.*

Et quæ ſunt æqualia ſibi mutuò congruere poſſunt ope intellectus inflectendo, vel tranſportando partes earum & debitè eas collocando.

XI. *DVAE rectæ concurrentes, & ſe mutuò ſecantes, non habent aliquam partem communem.* Tab. I. Fig. 12.

XII. *DVAE rectæ lineæ, poſſunt quidem conſtituere angulum, ſed non claudere ſpatium, ſeu figuram efficere.* Tabula I. Fig. 13

LINEAE omnes, à centro ad circunferentiam circuli ductæ, ſunt æquales inter ſe. Tab. I. Fig. 16.

b Def. 8. Manifeſtum eſt hoc, quia *b* radij omnes AC, AD, &c. menſurantur ab eadem linea recta AC.

EVCL. Prop. 1. lib. I. PROPOSITIO I. *Super data linea recta terminata Triangulum, habens tria latera inter ſe æqualia, conſtituere. Vocetur tale triangulum* Aequilaterum. Tab. I. Fig. 14.

Expoſitio. Sit quælibet data linea re-

recta AB, ſuper ipſam conſtruendum eſt triangulum, quod habeat tria latera inter ſe æqualia.

Conſtructio. Iuxta tertium Poſtulatum, facto centro A, interuallo verò rectæ AB, deſcribatur circulus CBD; Rurſus centro B interuallo eiuſdem rectæ BA, *a* alius circulus CAD deſcribatur. Et extenſo radio AB vſque ad circumferentiam circuli ACE in E, erit punctum E extra circulum CBD. Et quia linea curua ACE initium habet in A intra circulum CBD & pertingit ad punctum E extra eundem circulum poſitum: ergo curua linea ACE ſecabit circunferentiam circuli CBD alicubi vt in puncto C iam à puncto A ad C *b* recta ducatur; pariterque à puncto B ad C alia recta extendatur. Hic iam perfecta eſt conſtructio; facta enim eſt figura trilatera ABC, quam eſſe æquilateram pronuncio.

a *Poſt.* 3

b *Poſt.*

Demonſtratio. Quoniam duæ rectæ lineæ AB, & AC ducuntur à centro A ad circunferentiam circuli BCD. *c* Ergo recta AC æqualis eſt rectæ AB. Rurſus quia rectæ BC, & AB ducuntur à centro B ad circunferentiam circuli CAD: *d* erit recta BC æqualis eidem rectæ BA. Tam ergo AC, quàm CB æquales ſunt eidem rectæ AB. *e* Quare AC, & CB æquales ſunt inter ſe. Et tres

c *Axio* 12.

d *Axio* 12.

e *Axio* 1.

ſimetris exponi non *poſſe, nec debere*, quia modus quo antecedens continet conſequentem eſt inexplicabilis. Igitur ſi non *poteſt* carebimus vera definitione, & ignorata definitione Proportionalitatis incommenſurabilium nil de ipſis demonſtrari poterit, & proinde non dabitur eorum ſcientia Si non *debet* declarari ergo profitentur ſe docere poſſe ſcientiam aſſimetrarum pro-tionũ abſq; definitione earundem, ſcilicet abſq; præcognitione exiſtentiæ & quiditatis ſubiecti ſcibilis.

Simili modo aliam doctrinam proportionum laudare non poſſum. quia Primo loco Author eximius retenta Euclidis tertia definitione Proportionis addit nouam definitionem Proportionalitatis, dicendo, proportiones eſſe inter ſe *ſimiles*, vel *æquales* ſi habuerint *denominatores* æquales Poſtea in progreſſu demonſtrationum non vtitur hac definitione, ſed ſemper deducit quod A ad B eandem rationem habet quam C, ad D ex memorata definitione quarta Euclidis obſcura, & imperfecta, dicendo quod quantitas prima A ita continet quantitatem ſecundam B, vel ab ea continetur, ſicut quantitas C continet aliam D, vel ab ea continetur. Inſuper permutat proportiones alternè licet ille multoties comparabiles non ſint, nempe diuerſorum generum. Præterea de aſſimetris proportionalibus altum ſilentium.

Ex his omnibus ſatis aperte conſtare videtur imperfectam eſſe methodum Arabum, & ſectatorum eiuſdem doctrinæ.

Reſtat modo expendenda ſpeculatio Doctiſſimi Authoris in ſua Matheſi vniuerſali tradita, qui noua forma declarare nititur librum V Euclidis.

Primo reicit definitionem 6. Euclidis vt perplexam & non immediatam. Deinde, ait Proportionem *Quoto* extimari debere, & Proportionalitatem probari ſi identitas, vel æqualitas *Quotorum*, ſeu. *Va'orum*, vel *Respectuum* oſtendatur. Supponit poſtea *fra-*

ctio-

ſtiones numerorum & quantitarum Aſſime-
rarum earumque deſignationes oſtendere ,
valorem , ſeu *denominatorem* Proportionis ,
nempe Quotus eſt antecedens reſpectu ſui
conſequentis . Itaque ex eo quod A ad B ſit
: C ad D deducit quod fractio $\frac{A}{B}$ ſcilicet A
diuiſum per B equalis eſt fractioni $\frac{C}{D}$ ſeu C
diuiſo per D . Et hanc propoſitionem aſſu-
it loco definitionis , per quam omnia quæ
libro V. Euclidis continentur ſe demon-
raſſe ſuadetur .
At videat quæſo vir preclarus, quod licet
opoſitiones omnes , quas aſſumit ſint veræ
numeris , & in quantitatibus commenſu-
bilibus, tamen in rigore geometrico vſur-
ri non poſſunt vt principia euidentiſſima ,
m ſint Theoremata , quæ poſſunt , & de-
nt demonſtrari . Poſtea in Aſſimetris non
rcipitur euidenter quod dentur neque quid
t fractiones , & eorum Valores , ſeu Quo-
ſint antecedentes ipſorum conſequentium ;
m nullus reſpectus concipi , aut explicari
ſſit in illa infinitate partium, a qua talis
pectus incommenſurabilis determinatur ,
c quomodo diſtinguatur a quolibet alio .
Nec valet effugium quod fractiones in-
mmenſurabilium quantitatum ſint quoque
ionales, & numericæ, ſaltem potentia; cum
: vniuerſaliter verum non ſit: Demonſtra-
enim infinitas proportiones irrationales
i poſſe, quæ non ſunt radices vllarum po-
tatum numericarum cuiuſlibet gradus .
it *tab.* 8. *fig* 11. Progreſſio I, A, A^2 ,
^{3} , A^4 , A^5 , continuè pro liū cuius vna
portio A ad A^7 , ſit incommenſurabilis
nt reliquæ omnes proportiones in eadem
itinua ſerie incommenſurabiles quoque .
elligatur poſtea A eſſe vnitatem alterius
greſſionis nempe A^1 , B, B^2 , B^3 , B^4 ,
eadem proportione A ad A^2 , continuatę.
quia A ſibi ipſi æqualis eſt : ergo *B* æqua-
eſt A^2 , & B^2 , equalis eſt A^3 , & ſic vl-
teri-

terius. Et vt A ad B, ſeu ad A^2, ita erit A^2, ad B^2, erant autem A, & B incommenſurabiles, cum proportionales ſint incommenſurabilibus A, A^2, ſeu B. Igitur poteſtates A^2, & B^2, inter ſe quoque incommenſurabiles ſunt. Similiter A^3, B^3, incommenſurabiles erunt, & ſic quælibet aliæ eiuſdem gradus in infinitum.

Hinc conſtat falſum eſſe quod quælibet proportio irrationalis numerica cenſeri poſſit, & intercedat inter quantitates ſaltem potentia commenſurabiles, cum in ſupradictis progreſſionibus infinitis nunquam dignitates eiuſdem gradus commenſurabiles inter ſe ſint.

Et licet conſtaret quamlibet proportionem irrationalem eſſe aritmeticam, ob commenſurabilitatem dignitatum, ſeu potenriarum eiuſdem gradus, nunquam poſſet per demonſtrationem euinci quatuor quantirates irrationales habere eandem proportionem, niſi expreſſe oſtenderetur *cuius dignitatis* inter illas infinitas eſſent radices illæ propoſitæ irrationales. Hoc autem cum preſtari non poſſit vel ſaltem admitti non debeat ſine demonſtratione, fatendum eſt talem paſſionem radicum non perceptam, de qua ignoratur an ſit, conſtituere non poſſe definitionem ſcientificam

Et ſiquidem dari non poſſet euidens paſſio declarans naturam proportionalium Aſſimetrarum excuſabiles eſſent Viri Clariſſimi, qui obſcuras & coniecturales definitiones tradiderunt. At hoc preſtitum a me fuit ante triginta quinque annos.

Hoc quidem aſſirmabunt eruditi lectores, ſi legere dignentur definitiones III. Libri meæ reſtitutionis, in cuius nona declaratur quando vna proportio *Aſſimetra* eſt Maior, vel minor proportione aliqua commenſurabili, ſiue numerica, vt in *Tabula III. Fig.* 23. ſi C, & D fuerint commenſurabiles inter ſe, ſcilicet ſi C fuerit quælibet partes ipſius D vt Verbi gratia tres quartæ, certum eſt

da-

dari poſſe magnitudinem E quæ ſit $\frac{3}{4}$ ipſius B, & inſuper dantur innumerabiles magnitudines incommenſurabiles ipſi B quæ maiores ſint quam E, ſit hæc magnitudo A erit igitur A maior quam $\frac{3}{4}$ ipſius B. & tunc voco prop-nem Aſſimetram A ad B *maiorem prop-ne commenſurabili C ad D*. Similiter diminui poteſt A vt ſit minor quam $\frac{3}{4}$ ipſius B; dummodo A decurtata ſit incommenſurabilis ipſi B, & tunc voco prop-nem aſſimetram A ad B *minorem propor-ne commenſurabili quam habet C ad D*. Et talis æquidem paſsio nedum eſt poſsibilis, ſed etiam euidenter cognita, expreſſa vocibus non ambiguis, ſed clarè ſignificantibus naturam ſubiecti definiti: & proinde talis definitio erit perfecta, & principium ſcientiæ.

Poſtea in definitione decima *tab. III. fig.* 24. comparando quatuor quantitates, quarum binæ quæque eiuſdem generis ſint inter ſe incommenſurabiles: vt ſi A, & B ſint Aſſimetræ, pariterque C, & D; certum eſt dari poſſe tertiam proportionem commenſurabilem, vt E ad F, quæ ſit Verbi gratia ſexquitertia, tunc ſi proportio Aſsimetra A ad B fuerit maior, quam numerica E ad F, verum proportio C ad D irrationalis quoque ſit minor eadem rationali proportione E ad F, ſcilicet ſi A fuerit maior quam $\frac{4}{3}$ ipſius B, verum C fuerit minor quam ſexquitertia alterius D. Tunc vocatur Aſſimetra proportio A ad B *maior proportione incommenſurabili* quam habet C ad D.

Et hæc quoque paſſio eſt poſſibilis clara, & euidens; quia datis tribus quantitatibus, quarum prima ſit maior ſecunda, & tertia minor ſit eadem ſecunda, lumine naturæ percipimus primam quantitatem maiorem eſſe tertia.

Similiter in definitione vndecima *tab. III. fig.* 25. ſi earumdem irrationalium quatuor quantitatum proportio primæ ad ſecundam minor fuerit, & ratio tertiæ ad quartam ſit maior

VCLIDIS
RESTITVTI
IOANN. ALPHONSO
BORELLIO.

LIBER I.

PROOEMIVM.

GEOMETRIA, præcipua inter diſciplinas mathematicas, magnitudines conſiderat; atque vniuerſa ſpeculatio ſcientifica, quæ de tali ſu-
o fieri poteſt, verſatur, aut in
:mplatione rationis ſtructuræ,
nagnitudines formatæ ſunt; aut
ntemplatione proprietatum eſ-
ılium & paſſionum earundem
ıitudinum. Cumque aliquæ
ıitudinum ſtructuræ, atque
ınes, ſint adeò faciles & eui-
:s, vt nedum nullam prorſus
ioſam inquiſitionem requirant;
:mo ſanæ mentis eis aſſenſum
›it: aliæ verò ſint adeò recon-
& difficiles, vt nullo pacto
:di poſſint: ſitque innata nobis

via à notioribus ad ignota procedendi (cùm omnis doctrina intellectiua ex præexiſtenti, ſeu anticipatà cognitione fiat) debent euidentes conſtructiones, & paſſiones magnitudinum aſſumi vt principia, ex quibus ſcientificè diſcurrendo aliæ abſtruſæ & difficiles conſtructiones, & paſſiones venentur.

Attamen, ſiue faciles, ſiue difficiles ſint huiuſmodi contemplationes, ſemper nuncupari conſueuerunt propoſitiones; eo quod in qualibet earum aliquid contemplandum proponitur intellectui.

Patet ergo principia Geometriæ eſſe *Propoſitiones*, exponentes facilem rationem ſtructuræ qua magnitudines formantur; aut facilem & euidentem proprietatem, vel paſſionem earundem magnitudinum.

Et quoniam ſæpenumero magnitudines, habentes euidentiſſimam conſtructionem aut paſſionem, non habent proprium nomen; aut habent nomina æquiuoca, res diuerſas ſignificantia: propterea, vt quælibet magnitudo diſtinguatur à qualibet alia, nomen ipſi imponi debet, aut exponi germana nominis ſignificatio. Quapropter principiorum Geometriæ tria genera erunt.

Primum vocatur *Definitio* in qua declaratur ſeu imponitur nomen alicui magnitudini, quæ habeat euiden-

ıtiſſimam conſtructionem aut paſ-
ıem: & talis conſtructio aut paſ-
debet eſſe nedum vera, prima &
iſſima omnium quæ illi ſubiecto
ıpetunt; ſed etiam debet exponi
rè verbis non ambiguis, nec ob-
ris: nam ſi hiſce conditionibus
ːret non produceret certiſſimam
uidentem ſcientiam, ſed potius
iecturalem & dubiam opinio-
ı.

ecundum, in quo magnitudinis,
ıs nomen impoſitum & vſu re-
ːum eſt, exponitur aliqua eui-
; eius conſtructio: Et vocatur
io.

ertium, in quo magnitudinis,
nominatæ, exponitur euidens
proprietas, aut aliqua manife-
us paſſio; & vocatur *Dignitas*,
Axioma, aut *Pronunciatum*, ſiue
nunis notitia.

quoniam huiuſmodi Principia
ɔnſtrari nequeunt, cùm ſint no-
ıa; propterea tantummodo eorũ
ogus in veſtibulo huius ſcien-
ɔponetur; vt poſtea, demonſtra-
ſyllogizzando, ex eis deducan-
eritates aliarum Propoſitionum
ıditarum; quæ pariter ſubdiui-
ır. Propoſitio itaque difficilis,
a contemplatur ratio ſtructu-
ua magnitudo aliqua forma-
vocabitur *Problema*: Illa ve-
opoſitio abſtruſa, in qua con-

templatur proprietas vel paſſio aliqua magnitudinis, vocatur ***Theorema***.

DEFINITIONES.

I. CORPORIS *extremitates, nullam profunditatem habentes, vocentur* Superficies.

In Figura prima, Tabulæ primæ Facies ABCD longa & lata profunditate carens vocatur ſuperficies.

II. *SVPERFICIEI extremitates, nullam latitudinem habentes, vocentur* Lineæ.

III. *LINEAE extremitates, nullam longitudinem habentes, vocentur* Puncta.

Licet ſuperficies, linea & puncta non reperiantur ſeparata à corporibus; certum eſt tamen verè exiſtere in natura, & per abſtractionem poteſt vna ſine altera conſiderari; quia in quolibet corpore id quod tangitur & conſpicitur eſt ſola externa ſuperficies; & quando id vertitur circa ſe ipſum, aliquid quieſcens in eo reperitur, quod non erit corpus, cum integrum corpus moueatur rotando. Ergo pars immota erit ſimplex linea quę erit indiuiſibilis; cuius termini erunt Puncta. Patet ergo quod linea ex fluxu puncti generari poteſt; ſuperficies verò ex fluxu lineæ tranſuerſali; atque corpus ex fluxu ſuperficiei tranſuer-

rſali gigni poteſt. Quæ tres ſpe-
s quantitatis continuæ poſſunt
icipi infinitæ, ſi nimirum fluxus
infinitum ſpatium continuari
elligatur.

IEAM autem omnium breuiſſimam arum, quæ à puncto ad punctum xtendi poſſunt, Rectam *voco.* Tabula prima Fig.2. IV.

ERFICIES, cui omni ex parte recta nea congruit, Plana *vocetur.* Tabula prima Fig.3. V.

ANTITA, inclinationis duarum ctarum linearum, in plano ſe mutuò angentium, & non in directum ia- ntium alterius ad alteram, voce- tr Angulus Planus. Tab.I.fig.4. VI.

i duæ rectæ lineæ AB, AC ſe- uo tangant in A & non ſint in ctum conſtitutæ, voco *Angulum um*, non extenſionem linearum C, nec ſpatium ab eis, compre- ſum; nec relationem vnius ad al- m, ſed illam tantam determina- que flexionem ſeu inclinatio- lineæ AC verſus AB.

RFICIES plana ſub vno, vel ali- ibus terminis comprehenſa, Figu- *vocetur, vt ſunt A, & B.* Tab. I. g. 5. VII.

RA, quæ deſcribitur ex reuolutio- rectæ lineæ finitæ in plano, circa terum eius punctum extremum ieſcens, quouſque ad eum locum eat, à quo moueri cæperat, vocetur VIII.

Circulus, & *Punctum quieſcens vocetur* Centrum:*linea verò, ab extremo eius termino deſignata, dicatur* Circunferentia. *Et qualibet recta, à centro ad circunferentiam extenſa,* Radius *circuli nuncupetur, vel* Semidiameter. Tab. I. Fig. 6.

Vt ſi recta linea AB, circa punctum A quieſcens, reuoluatur in plano per B, D, & C, quouſque redeat ad locum AB, à quo moueri cæperat: Vocabitur figura plana, ex fluxu illius lineæ deſcripta, *Circulus*; & punctum A, *Centrum*; & linea BEDC, *Circumferentia*; & rectæ lineæ AC, & AB *Radij* Circuli vocentur.

IX. *FIGVRAE planæ, quæ à rectis lineis continentur, vocentur* Rectilineæ.

X. *ET quæ à tribus rectis lineis*, Trilatera, *ſeu* Triangula *vocentur*. Tabula I. Fig. 7.

XI. *QVAE ſub quatuor*, Quadrilatera, *ſeu quadrangula*.

XII. *ET ſi à pluribus, quàm quatuor rectis lineis contineantur*, Multilateræ, *vel multangulæ dicantur, denominatæ à multitudine laterum, ipſam figuram comprehendentium*.

XIII. *MAGNITVDO magnitudinis menſura dicitur, cùm illa, multoties ſumpta, alteri æqualis fuerit*. Tabula I. Figura 8.

PE-

TITIONES, SEV POSTVLATA.

NCTO ad punctum lineam rectam I.
tere.

neam rectam producere in conti- II.
um, & directum. Tab. I. Fig. 9.

ouis centro, & interuallo circu- III.
a deſcribere. Tab. I. Fig. 10.

quacunque magnitudine data, IV.
aliam magnitudinem ſumi, vel
iorem, vel minorem.

m tales operationes non ſint
anicæ non fiunt organis corpo-
ſed ope intellectus, concipien-
xum puncti, aut lineæ; & ideo
euidentiſſimæ operationes, &
ructiones intellectuales.

IOMATA, SEV RONVNCIATA.

eidem æqualia, inter ſe ſunt I.
alia. Et quod vno æqualium
ius eſt, aut minus, maius quoque,
minus eſt altero æqualium; & II.
ra.

æqualibus æqualia adiecta ſint, to- III.
uoque ſunt æqualia.

b æqualibus æqualia ablata ſint, IV.
relinquuntur ſunt æqualia.

ALIA addita, vel ablata ab inæ- V.
ibus, inæqualia faciunt.

, tripla, &c. vel dimidia eiuſ- VI.

 dem

dem, vel æqualium, ſunt pariter æqualia.

VII. *SI eadem magnitudo metiatur duas magnitudines, & earum compoſitum, atque differentiam menſurabit*: Tabula I. Fig. 11.

VIII. *TOTVM ſua parte maius eſt.*

IX. *TOTVM æquale eſt omnibus ſuis partibus, ſimul ſumptis.*

X. *QVAE ſibi mutuò congruunt, ſunt æqualia.*

Et quæ ſunt æqualia ſibi mutuò congruere poſſunt ope intellectus inflectendo, vel tranſportando partes earum & debitè eas collocando.

XI. *DVAE rectæ concurrentes, & ſe mutuò ſecantes, non habent aliquam partem communem.* Tab.I. Fig.12.

XII. *DVAE rectæ lineæ, poſſunt quidem conſtituere angulum, ſed non claudere ſpatium, ſeu figuram efficere.* Tabula I. Fig. 13

LINEAE omnes, à centro ad circunferentiam circuli ductæ, ſunt æquales inter ſe. Tab. I. Fig.16.

b Def. 8. Manifeſtum eſt hoc, quia b radij omnes AC, AD, &c. menſurantur ab eadem linea recta AC.

EVCL. Prop. 1. lib. I. PROPOSITIO I. *Super data linea recta terminata Triangulum, habens tria latera inter ſe æqualia, conſtituere. Vocetur tale triangulum* Aequilaterum. Tab.I.Fig.14.

Expoſitio. Sit quælibet data linea re-

ta AB, ſuper ipſam conſtruen-
n eſt triangulum, quod habeat
latera inter ſe æqualia.

onſtructio. Iuxta tertium Poſtu-
im, facto centro A, interuallo
o rectæ AB, deſcribatur circu-
CBD; Rurſus centro B inter-
lo eiuſdem rectæ BA, *a* alius cir- a *Poſt.* 3
is CAD deſcribatur. Et exten-
adio AB vſque ad circumferen-
i circuli ACE in E, erit pun-
n E extra circulum CBD. Et
i linea curua ACE initium ha-
in A intra circulum CBD &
ingit ad punctum E extra eun-
i circulum poſitum: ergo curua
a ACE ſecabit circunferentiam
uli CBD alicubi vt in puncto C
à puncto A ad C *b* recta duca- b *Poſt.*
; pariterque à puncto B ad C alia
a extendatur. Hic iam perfe-
ſt conſtructio; facta enim eſt
ra trilatera ABC, quam eſſe
ilateram pronuncio.

emonſtratio. Quoniam duæ rectæ
æ AB, & AC ducuntur à cen-
A ad circunferentiam circuli
D. *c* Ergo recta AC æqualis eſt c *Axio* 12.
e AB. Rurſus quia rectæ BC,
B ducuntur à centro B ad cir-
ferentiam circuli CAD: *d* erit d *Axio* 12.
i BC æqualis eidem rectæ BA.
i ergo AC, quàm CB æquales
eidem rectæ AB. *e* Quare AC, e *Axio* 1.
B æquales ſunt inter ſe. Et tres

lineæ rectæ AB, BC, & CA, claudentes triangulum ABC, æquales ſunt inter ſe.

Concluſio. Ergo ſuper data recta linea AB triangulum, à tribus lateribus æqualibus comprehenſum, conſtruximus: quod faciendum imperabatur in Propoſitione. Vocetur talis figura *Triangulum Aequilaterum*.

EVCL. *Prop.* 2. *I.* PROPOSITIO II. *Ad datum punctum data recta lineæ æqualem rectam lineam ducere.* Tab. I. Fig. 15.

Sit datum punctum A, & data recta linea BC. Duci debet à puncto A recta linea, quæ ſit æqualis ipſi
a *Pet.* 1. rectæ BC. Ducatur à *a* puncto C ad A recta linea, ſi opus eſt; & ſu-
b *Prop.* 1. per *b* CA triangulum æquilaterum
c *Pet.* 3. ADC deſcribatur; & centro *c* C, interuallo CB circulus BE deſcri-
d *Pet.* 2. batur; & recta *d* DC in directum producatur ad partes C, quouſque circunferentiam circuli ſecet in
e *Pet.* 3. puncto E. Et rurſus *e* centro D, interuallo DE, alius circulus EG deſcribatur, ſecans rectam lineam DA, productam in G. Dico rectam AG æqualem eſſe datæ rectæ lineæ BC. Quoniam rectæ DE, & DG ducuntur à centro ad peripheriam circuli EG: *f* Ergo ſunt æqua-
f *axi.* 12. riam circuli EG: *f* Ergo ſunt æquales inter ſe; & ab his auferuntur partes æquales AD, & CD (cùm
g *axi* 3. ſint latera trianguli æquilateri). *g* Ergo

o reſiduum AG æquale eſt reſi-
CE. Sed etiam CB æqualis eſt
in CE; *h* cùm ſint ductæ à cen- h ax. 12
ad circunferentiam circuli BE.
o duæ rectæ BC, & AG æqua-
ſunt vni tertiæ CE. *i* ideoque i ax. 1.
ales inter ſe. Quare ducta eſt à
cto A recta AG æqualis datæ
. Quod erat faciendum.

)POSIT. III. *Duabus datis re-* EVCL. prop. 3. I.
s lineis inæqualibus, de maiore
ualem minori rectam lineam de-
here. Tab. I. Fig. 16.
t A linea recta minor, CB ma-
Debet ex maiori CB abſcindi
ientum æquale ipſi A. Ducatur *a* a Prop. 2.
ncto B recta linea BD, quæ ſit
lis ipſi A, & *b* centro B, inter- b Pet. 3
BD, deſcribatur circulus DE,
s rectam CB in E puncto. Di-
E eſſe ſegmentum detractum
le ipſi A. Quoniam BE æqua-
t ipſi BD, *c* quia ductæ ſunt à c ax. 12
o ad peripheriam circuli; ſed
onſtructione A æqualis eſt ei-
BD. Quare A, & BE, cùm
ni tertiæ æquales: *d* erunt inter d ax. 1.
riter æquales. Duabus igitur
, &c. quod erat faciendum.

POSITIO IV. *Si in duobus tri-* EVCL. prop. 4. I.
ulis, circa verticales angulos
iaies, duo latera vnius æqualia
rint duobus lateribus alterius tri-

anguli, ſingula ſingulis: erunt baſes æquales inter ſe; & triangula erunt æqualia; & duo anguli reliqui æquales erunt duobus reliquis angulis, ſinguli ſingulis, qui opponuntur æqualibus lateribus. Vocentur autem huiuſmodi triangula ſimiliter æqualia. Tabula I. Fig. 17.

Sint duo triangula ABC, & DEF, quorum anguli verticales A, & D, æquales ſint inter ſe, & latus AB æquale ſit lateri DE, nec non latus AC æquale ſit lateri DF. Dico baſim BC æqualem eſſe baſi EF; & triangulũ ABC æquale triangulo DEF; & angulum B æqualem eſſe angulo E, quibus opponuntur æqualia latera AC, & DF, & angulum C æqualem eſſe angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera æqualia AB, & DE.

Facta intellectuali ſuperpoſitione trianguli ABC ſuper triangulum DEF, ita vt punctum A ſuper punctum D, & recta AB ſuper DE cadat; neceſſariò ſibi mutuo *a* congruent duæ rectę AB, & DE: pariterque angulus A angulo D congruet, propter æqualitatem; ideoque AC ſuper DF cadet: & propter eorum æqualitatem ſibi mutuò *b* congruent. vnde punctum C ſuper punctum F incidet. His poſitis dico baſes BC, & EF ſibi mutuò congruere. Si enim hoc verum non eſt,

a Axiom. 9.

b Axiom. 9.

ca-

ſant partes intermediæ ipſius BC
ra?, vel infra ipſam EF, vt in ſitu
F; & tunc duæ rectæ lineæ EF,
EKF clauderent ſuperficiem; *c* ... od eſt abſurdum. Non ergo ba- BC ſupra, vel infra baſim EF in- ere poteſt, quando puncta extre- B, & C præcisè ſupra puncta E, F cadunt. Quapropter neceſſe baſes BC, & EF ſibi mutuò con- ... ere; & *d* ideo inter ſe æquales ... nt. Similiter triangula ipſa AB & DEF ſibi mutuò congruent; ... ndoquidem ſuperficies planæ t, quarum omnia extrema ſe tan- ... t, & partes intermediæ trian- ... orum ſe ſe tangant neceſſe eſt, ... s *e* linea recta non congrueret ... ni ex parte vtrique ſuperficiei ... næ, quod eſt abſurdum. Ergo *f* ... ngula ABC, & DEF æqualia ... iter ſunt inter ſe. Poſtremò an- ... li B, & E, cùm ſibi mutuò con- ... ant, æquales erunt inter ſe, qui ... ponũtur æqualibus lateribus AC, DF: *g* pariterque anguli C, & F ... i mutuò congruent, eruntque in- ... ſe æquales, qui opponuntur la- ... ibus æqualibus AB, & DE. Qua- ... opter ſi in duobus triangulis, &c. ... æ erant demonſtranda. Vocen- ... r autem breuitatis cauſa duo tri- ... gula, iam dictas conditiones ha- ... ntia, ſimiliter æqualia.

c *Axiom.* 11.

d *Axiom.* 9.

e *Defin* 5.

f *Axiom.* 9.

g *Axiom.* 9.

PRO-

PROPOSITIO V. *Duo anguli, qui duos æquales angulos, vel eundem angulum conſequuntur, ſunt inter ſe æquales.* Tab. I. Fig. 18.

Sint duo anguli ABC, & DEF inter ſe æquales, & productis rectis lineis AB, & DE ad partes angulorum B, & E vſque ad K, & M. Dico angulos CBK, & FEM, qui eoſdem conſequuntur, æquales inter ſe eſſe. Quoniam angulus DEF ſupponitur æqualis angulo ABC. Ergo facta intellectuali ſuperpoſitione rectæ DE ſuper AB, atque
a *Axiom. 9.* puncti E ſuper B, ipſi *a* anguli DEF, & ABC ſibi mutuò congruent; ideoque recta EF cadet ſuper BC;
b *Axiom. 10.* ſed recta EM cadit ſuper rectam BK; quandoquidem rectæ *b* DE, & AB, in directum productæ vſque ad M, & K, ſibi mutuò congruentes, ſegmentum commune habere
d *Axiom. 9.* nequeunt. Ergo anguli FEM, & CBK ſibi mutuò congruent, & *d* propterea æquales inter ſe erunt.

Secundò vnius anguli ABC producantur rectæ lineæ AB, & CB, ad partes anguli B, in K, & O. Dico angulos ambos CBK, & ABO, (qui conſequuntur) eſſe inter ſe æquales. Intelligatur idem angulus abc applicatus ſupra alium angulum ABC ſibi ipſi æqualem, inuerſo modo; ita vt recta ab cadat ſupra rectam CB, atque recta

cb

ıdat ſupra rectam AB. Ma-
m eſt rectam *e* b k cadere è ſupra BO; & recta o b ſupra rectam KB. Quare lus ABO æqualis erit angulo , quod erat oſtendendum. *e Axiom. 10.* *f Axiom. 9.*

lar. *Hinc colligitur duas rectas* *s ſe ſecantes, efficere angulos ad* *cem æquales inter ſe.* T.I. F.18. n in duabus rectis lineis AK, , ſe ſecantibus in B, *g* oſtenſi uo anguli ad verticē ABO,& æquales inter ſe; qui conſe-
ıtur angulum ABC. Eadem e duo anguli ad verticem AB KBO *h* æquales erunt inter m conſequantur eundem an-
ABO. EVC.I. pro. 15. p. *g Prop. 5.* *h Prop. 5.*

POSITIO VI. *In triangulo,* *latera inter ſe æqualia habente,* *li, qui ad baſim ſunt, æquales* *t inter ſe; & productis æqualibus* *ribus, anguli infra baſim poſiti* *les quoque inter ſe erunt. Voce-* *uiuſmodi triangulum* Iſoſceliū. . I. Fig. 19. EVCL. prop. 5. I.

riangulum ABC, cuius late-
ıalia ſint BA, & CA. Dico os ABC, & ACB, qui ſupra ſunt, æquales eſſe inter ſe; & ctis rectis AB, & AC infra BC, vt in D, & E, eſſe angu-
BC, & ECB æquales quoque in-

a Poſtul 2. inter ſe. Producantur *a* indefinitè latera BA, & CA ad partes verticis A, vt in G, & F; tam ex AG, *b prop. 3.* quàm ex AF *b* ſecentur rectæ AM, & AH, ſingulæ æquales ipſi AB, *c poſt. 1.* vel AC; & coniungatur *c* recta HM. Et quoniam duo triangula BAC, HAM circa angulos, BAC, *d Corol. prop. 5.* & HAM *d* æquales (cùm ſint ad verticem) hàbent latera æqualia, ſingula ſingulis, ex conſtructione. Ergo *e prop. 4* *e* angulo MHA æqualis eſt angulus CBA (cùm latera ſub eis ſubtenſa MA, & CA æqualia facta ſint). *f prop. 4* Eadē ratione *f* angulus ACB æqualis erit eidem angulo MHA (cùm pariter ſubtenſa latera BA, & MA æqualia poſita ſint). Quare duo anguli ABC, & ACB ſunt æquales *g Axiom. 1.* vni tertio angulo MHA; ideoque *g* duo anguli, ſupra baſim ABC, & ACB æquales inter ſe erunt. Quod erat primo loco oſtendendum.

h prop. 5. Rurſus quoniam duo anguli AB C, & ACB æquales oſtenſi ſunt, *h* Ergo duo reliqui, qui deinceps ſunt anguli DBC, & ECB æquales inter ſe erunt. Quapropter duo anguli infra baſim trianguli, latera æqualia habentis, ſunt inter ſe æquales. Vt erat probandum. Vocetur huiuſmodi triangulum Iſoſcelium.

POSITIO VII. *Si duo triangu-* EVCL. 8. lib. 1.
ia latera tribus lateribus æqua-
a buerint, ſingula ſingulis, erunt
ıter æqualia. Tab. I. Fig. 20.
duo triangula G, & H, at-
tus AB æquale ſit lateri DE,
ipſi DF, partiterque BC æ-
lateri EF. Dico angulum A
m eſſe angulo D, & B ipſi E,
n C ipſi F. Intelligatur trian-
G, cum eius latere BC col-
m ſupra latus EF, ita vt pun-
3 in E cadat, *a* C verò in F, a *Axiom.* 9.
r æqualitatem; & triangulum
l eaſdem partes, ſed ad oppo-
adat; tunc reliqua latera con-
ia erunt æqualia. Coniunga-
ıdem *b* recta AD; quæ aut b *poſt.* 1
unctum C tranſit, aut ſecat
unem baſim BC, aut extra
cadit.

20.)In 1 caſu, cùm duo latera
& BD in triangulo DAB ſint
ia ex hypotheſi, erit *c* trian- c *prop.* 6.
ipſum iſoſcelium; ideoque
nguli A, & D ſupra baſim
s erunt inter ſe, & ex quar-
poſitione triangula ipſa G,
unt ſimiliter æqualia.

21)In 2 verò caſu erit trian-
ADB pariter iſoſceles: vn-
o anguli BAD, & BDA æ- c *prop.* 6.
erunt inter ſe: Pari ratione
ngulo iſoſcelio CDA duo an-
AD, & CDA æquales erunt
in-

inter ſe. Ergo ſi prioribus æqualibus hi poſteriores æquales addantur, efficientur *d* duo anguli BDC, & BAC inter ſe ęquales (*fig* 22) Deniq; in tertio caſu, ab angulis aqualibus BDA, & BAD auferendo æquales angulos CDA, & CAD relinquentur *e* duo anguli BDC, & BAC inter ſe æquales; deinde *f* reliqui anguli æquales erunt. Quapropter ſi duo triangula, &c. Quod erat oſtendendum.

d axio. 2. *e axio. 3.* *f prop. 4*

EVCL. 9. 1. PROPOSITIO VIII. *Datum angulum rectilineum biſariam ſecare.* Tabula I. Fig. 23.

Sit angulus rectilineus BAC Debet hic angulus diuidi in duos angulos æquales. Sumatur in AB quodlibet punctum D; & ex AC *a*, producta indefinitè, ſecetur *b* AE æqualis ipſi AD, & coniugatur *c* recta DE; & ſuper DE ad partes oppoſitas deſcribatur *d* triangulum æquilaterum DFE; tandem à puncto A ad F recta *e* coniungatur. Dico AF problema efficere. Quoniam in duobus triangulis DAF, & EAF latus AF eſt commune, & latera DA, & AE ſunt æqualia, ex conſtructione, & baſes DF, EF ſunt æquales, cùm ſint latera trianguli æquilateri. Ergo, ex præcedenti propoſitione, anguli DAF, & EAF ſunt inter ſe æquales. Quare angulus

a poſt. 2 *b prop. 3.* *c poſt. 1* *d prop 1* *e poſt. 1*

C diuiſus eſt bifariam à recta
Quapropter datum angulum
n ſecuimus; quod erat fa-
n.

OSITIO IX. *Datam rectam* EVCL. 10. I.
n bifariam ſecare. Ta.I.Fig.24.
ecta linea finita AB diuiden-
riam. *a* Deſcribatur ſuper a prop. 1
riangulum æquilaterum AC
us angulus verticalis C *b* bi- b prop. 8.
ſecetur à recta CD, diui-
aſim AB in puncto D. Dico
n D eſſe quæſitum. Quoni-
triangulis ACD, & BCD
gulos verticales ACD, &
æquales ex conſtructione,
D eſt commune, & latera A
C ſunt æqualia; cùm ſint la-
quilateri trianguli. Ergo *c* c prop 4
D æqualis eſt baſi BD. Da-
ur rectam AB bifariam ſe-
in D. Quod erat facien-

OSITIO X. *Data recta li-* EVCL. 11. I.
à puncto in ea dato rectam li-
eleuare, efficientem angulos,
inceps ſunt, æquales inter ſe.
ur vterque æqualium angulo-
Rectus; & quæ inſiſtit recta
Perpendicularis vocetur eius,
ſiſtit. Tab. I. Fig. 25.
cta AB, & punctum in ea
quo debet educi linea, effi-
ciens

ciens cum recta AB angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe. Sumatur quodlibet punctum D; atque
a prop. 3. ex altera parte, *a* ex CB, producta ſecetur linea CE æqualis ipſi C
b prop. 1 D; & ſuper DE *b* triangulum æquilaterum DFE deſcribatur; deni-
c poſt. 1 què à puncto C ad F *c* recta ducatur. Dico FC Problema efficere.

Quoniam duo triangula DCF, & ECF habent latus CF commune, & latera DC, & EC æqualia, ex conſtructione; nec non baſes F D, & FE æquales, cùm ſint latera
d prop. 7. trianguli æquilateri. Ergo *d* anguli FCD, & FCE æquales ſunt inter ſe; vt propoſitum fuerat. Vocentur ambo anguli ACF, & BCF Recti; & FC Perpendicularis dicatur ad rectam AB.

EVCL. 12. I. PROPOSITIO XI. *Super datam rectam lineam infinitam à puncto dato, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam ducere.* Tab.I. Fig.26.

Sit AB recta interminata, & punctum extra ipſam C. Ducenda eſt à puncto C perpendicularis ſuper A B. Sumatur in recta AB quodlibet
a poſt. 1. punctum H, & iungatur *a* recta C
b poſt. 2 H, & producatur *b* vltra rectam A
c poſt. 3 B in G; & centro *c* C, interuallo CG, circulus DGE deſcribatur, cuius circunferentia neceſſariò ſecabit rectam AB: nam punctum G radij

CG

ra rectam AB poſitum fuit.
gitur eam in punctis D, & E;
ſecetur DE bifariam in F, d prop.9
ntur rectæ CF, CD, & C
o CF eſſe perpendicularem
m.
iam in triangulis DFC, &
tus CF eſt commune, &D
le eſt ipſi FE, ex conſtructio-
iterque baſes CD, & CE
ſunt, cùm e à centro ad cir- e Axio
ntiam circuli ſint ductæ. Er- 12.
uli DFC, & EFC æqua- f prop.7
er ſe, ideoque g recti. Vn- g Pro.1
perpendicularis eſt ad AB.
us ergo à puncto C perpen-
m ſuper AB. Quod erat, &c.

OSITIO XII. *Cùm recta li-* EVCL.
ſuper rectam conſiſtens lineam 13.I.
s facit, aut duos rectos, aut duo-
ctis æquales efficiet. At angu-
inæqualium, qui maior eſt re-
cetur Obtuſus: *Qui verò recto*
eſt, Acutus. Tab.I. Fig. 27.
linea AB inſiſtat rectæ CD
e angulos, qui ſunt deince-
D, & ABC. Oſtendendum
ambos eſſe rectos, vel ſimul
s, duobus rectis æquales. Si
B perpendicularis eſt ad C
unt anguli deinceps duo re- a Prop.
minùs erit alter acutus, al- 10.
uſus.
atur alia recta linea FH, & à prop.10
quo-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

quolibet eius puncto G educatur G E perpendicularis ad FH. Poſtea facta intellectuali applicatione rectę CD ſuper FH, vt punctum B cadat ſuper G illæ rectæ lineæ ſibi mutuo congruent; & ideo CB ſuper FG, nec non BD ſuper HG cadet, atq. BA ſuper GI. Igitur angulus maior DBA congruet angulis recto HGE & EGI ſimul ſumptis; Eſt vero angulus ABC æqualis IGF cui congruit. Ergo ſumma angulorum D BA & ABC æqualis eſt tribus angulis recto HGE, EGI & IGF ſimul ſumptis; ſed duo anguli EGI, & IGF conplent angulum rectum EG F. Igitur ſumma angulorum DBA & ABC æqualis eſt ſummæ duorum rectorum HGE & EGF. quare, &c.

EVCL. 14. l. I. PROPOSITIO XIII. *Si ad aliquod punctum rectæ lineæ duæ aliæ rectæ, non ad eaſdem partes ductæ, eos, qui ſunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: indirectum erunt inter ſe duæ poſteriores rectæ lineæ.* Tab. I. Fig. 28.

Duo anguli deinceps poſiti ABC & ABD ſint æquales duobus rectis. Dico CB & BD in directum eſſe conſtitutas, ideſt efficere vnicam rectam lineam. Ducatur alia recta FGH & ab eius pũcto G a educatur perpendicularis GE. & quia ſumma angulorum CBA, & ABD æqualis

a prop. 10.

lis

eſt ſummæ duorum rectorum F
E, & EGH. Ergo facta intelle-
ali applicatione eorum vt CB ca-
ſuper FG, & punctum B ſuper
neceſſario ſibi mutuo congruent:
ideo duæ rectæ CB & BD cadent
er rectam lineam FH. Quare C
vna recta linea eſt.

AXIOMA XIII.

ecta linea, in ſuo extremo ſemper rpendiculariter conſtituta ſuper a-m rectam lineam, moueatur in tranſuerſum in eodem plano: alterum nctum extremum tranſlatæ rectæ ea in eius fluxu rectam lineam de-ibet. Tab. I. Fig. 29.

enim recta linea AB, perpen-
lariter erecta ſuper rectam line-
BC intelligatur tranſlata, in
m plano, verſus C, hac lege,
unctum B extremum ipſius AB
er contingat rectam lineam
pariterque, vt AB dum tranſ-
r ſemper conſtituat cum BC
los rectos. Manifeſtum eſt li-
AED, deſcriptam à puncto
ente, eſſe rectam; eo quod om-
uncta lineæ AED aqualibus
allis diſtant ab omnibus pun-
cta BC menſuratis ab eadem
ndiculari tranſlata: & ideo
puncti A per AED non eſt
ans, non flexuoſus, ſed a qua-
& vniformis, vt exigit fluxus
bre-

breuiſſimus ſimilis fluxui puncti B per BC.

PROPOSITIO XIV. *Si ad duas rectas lineas in uno plano iacentes eadem recta perpendicularis fuerit, quælibet alia recta interpoſita perpendicularis ad vnam earum æqualis erit illi, & erit quoque perpendicularis ad reliquam. Vocentur illæ duæ rectæ inter ſe* Parallelæ,*& recta linea ad eas perpendicularis, vocetur diſtantia parallelarum.*Tab.I. Fig.30.31.

Sit recta linea EF perpendicularis ad vtramque rectam AB, & CD, exiſtentes in eodem plano; & educta à puncto C *a* recta CA perpendiculari ad CD, Dico primo CA occurrere ipſi BA ad eaſdem partes vltra CD verſus E vt in A; & CA æqualem eſſe ipſi EF. Si enim hoc verum non eſt ad eaſdem partes E ad quas tendit recta FE ſecetur *b* recta GC æqualis EF; & ſecetur *c* FD æqualis CF, & intelligatur GC transferri vſque ad D, ſemper perpendiculariter conſtituta in puncto C ſuper rectam CD; neceſſariò *d* punctum G in eius fluxu rectam GEH deſcribet, quæ per punctum E tranſibit; quandoquidem GC, & EF æquales ponuntur. Patet quod recta GE ſecabit rectam EA, cum punctum G diuerſum ſit ab A. Et tandem iungantur *e* rectæ lineæ GF, &

a *prop.* 10.
b *prop.* 3
c *prop.* 3
d *Axio* 14.
e *poſt.* 1.

HF. Quoniam duo triangula *i*
CF, & HDF circa angulos re-
s C, & D latera æqualia habent
C ipſi HD, & CF ipſi DF. *f* Er- *f prop.4*
baſes GF, & HF æquales ſunt;
iterque anguli GFC, HFD in-
ſe ſunt æquales; ſuntque anguli
E, DFE recti. Igitur *g* reſidui *g Axio 3.*
uli GFE, & HFE æquales ſunt;
circa eos latera GF HF æqua-
oſtenſa ſunt, & EF eſt commu-
. Ergo *h* anguli GEF, & HEF *h prop.4*
ales ſunt inter ſe; ideoque *i* re- *i Prop. 10.*
. Erat autem angulus AEF ex
othesi rectus. Igitur anguli G
, & AEF æquales inter ſe ſunt;
s & totum, quod eſt impoſſibi-
Nulla ergo alia recta præter ip-
AC eſſe poteſt æqualis ipſi EF.
ico ſecundò angulum CAE re-
i eſſe. Quoniam recta CF per-
licularis eſt ad duas rectas AC,
F; & alia recta AE perpendicu-
eſt ad vnam ipſarum EF. Er-
vt prius, erit recta AE æqualis
CF, quæ eſt perpendicularis ad
nque. Ducatur poſtea recta
Quia in triangulis AEC &
latus AC ipſi FE eſt æqua-
tque AE ipſi FC æquale, &
CE communis. Ergo *l* recto
lo EFC æqualis eſt angulus C *l prop.7*
Quare angulus CAE rectus
vt propoſitum fuerat. Vo-
r rectæ lineæ AB & CD *Pa-*

rallela: & EF perpendicularis ad vtramque, vocetur *Diſtantia Parallelarum*.

Corollariũ. *Manifeſtum eſt duas parallelas AB & CD non con urrere, licet producantur in infinitum ad vtraſque partes. propterea quod vbique inter ipſas intercipi poteſt aliqua perpendicularis, vt eſt AC, vel BD, quæ ſemper æqualis eſſe debet ipſi EF, ſcilicet diſtantia parallelarum*. Ta. I. Fig. 31.

EVCL. 29. I. PROPOSITIO XV. *Recta linea, ſecans duas parallelas, efficiet alternos angulos æquales; externum æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes; atque internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet*. Tabula I. Fig. 32.

Sint Rectæ lineæ AB & CD inter ſe parallelæ, ſecenturque à recta linea EF in punctis G & H. Dico primò alternos angulos AGF, & DHE æquales eſſe inter ſe. Ducatur *a* à puncto G recta GM perpendicularis ad rectam CD, ſecans eam in M, atque à puncto H ducatur HO perpendicularis ad AB, ſecans eam in puncto O. Et quoniam duæ rectæ AB & CD ſunt parallelæ; & GM perpendicularis eſt ad vnam ipſarum CD: erit *b* quoque eadem GM perpendicularis ad reliquam AB

a prop. 11.

b prop. 14.

AB;eſtq; HO perpēdicularis ad AB.
irgo, vt in præcedenti prop. oſten-
ım eſt, recta intercepta OH ęqualis
rit GM; pariterque intercepta GO
qualis erit MH, propterea quod
IO, GM ſunt quoque inter ſe pa-
llelæ. Quare in triangulis OHG,
IGH duo latera GO, & HO æqua-
ı ſunt duobus lateribus HM, &
M, ſingula ſingulis; Eſtque baſis
H communis. Ergo *d* anguli al-
rni DHG, & AGH æquales ſunt d prop. 7
ter ſe; pariterque eorum *e* com-
ementa ad duos rectos, ſcilicet e prop. 5
guli BGH, & CHG æquales
unt inter ſe.

Dico ſecundò externum angulum
;B æqualem eſſe interno, oppoſi-
, & ad eaſdem partes conſtituto
gulo GHD. Quoniam *f* propter f ex pa.
allelas AB, & CD æquales ſunt 1. huius
er ſe alterni anguli DHG, & A
H, eſtque *g* angulus EGB æqua- g Corol.
eidem angulo AGH ad verticem prop. 5.
is. Ergo *h* angulus EGB æqualis h Axi.
angulo GHD. 1.

Dico tertiò duos angulos AGH,
CHG internos, & ad eaſdem
tes, eſſe æquales duobus rectis.
oniam propter paralellas *i* ſunt i part. 1
anguli alterni AGH, & DHG huius.
ales inter ſe, addito *l* communi l Axi.
ulo CHG: erunt duo anguli A 2.
I, & CHG, ſimul ſumpti, æqua-
luobus angulis DHG; & CHG,

m prop. 12. ſed *m* hi, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis. Ergo duo anguli AGH, & CHG duobus rectis ſunt æquales. Quæ omnia demonſtrari debebant.

EVCL. 27. & 28. I. PROP. XVI. *Si in duas rectas lineas recta linea incidens, alternos angulos æquales inter ſe fecerit; aut externum angulum æqualem interno, oppoſito, & ad eaſdem partes; aut duos internos ad eaſdem partes fecerit æquales duobus rectis: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.* Ta. I. Fig. 33.

In duas rectas lineas AB, & CD incidens, vtcunque, recta linea EF, ſecans eas in punctis G & H efficiat primò alternos angulos AGH, & DHG æquales inter ſe. Dico AB & CD inter ſe parallelas eſſe. Si enim hoc verum non eſt, à puncto G ducatur *a* recta linea GM perpendicularis ad CD, ſecans eam in M; atque à puncto G educatur *b* recta GN perpendicularis ad ipſam MG. Et quoniam eadem recta linea GM perpendicularis eſt ad duas rectas lineas CD & NG: erunt *c* lineæ rectæ CD & NG parallelæ inter ſe, quæ cùm ſecentur, vtcunque, à recta linea EF in punctis G & H: erunt *d* duo anguli alterni NGH, & DHG æquales inter ſe; ſed angulus AGH ſuppoſitus fuit æqualis eidem angulo DHG. Ergo *e* anguli

a Prop. 11. b prop. 10. c prop. 14. d prop. 15. e Axi. 1.

uli NGH, & AGH æquales ſunt
nter ſe, pars & totum, *f* quod eſt
bſurdum. Nulla ergo alia recta
nea NG præter ipſam AB eſſe po-
eſt parallela ipſi CD. *f Axi. 7.*

Sit ſecundò externus angulus E
A æqualis interno, oppoſito, &
d eaſdem partes conſtituto angulo
HC. Dico rectas AB, & CD
riter parallelas eſſe. Quoniam
gulus CHG ſupponitur æqualis
gulo AGE, eſtque *g* angulus BG
æqualis eidem angulo AGE ad
rticem. Ergo *h* duo anguli CH
& BGH alterni inter ſe æqua-
erunt; & ideò ex prima parte
ius, rectæ lineæ AB & CD pa-
lelæ erunt. *g Corol. prop. 5.* *h ax. 1.*

Sint tertiò duo anguli interni ad
dem partes, AGH & CHG, æ-
ales duobus rectis. Dico pariter
tas AB, & CD parallelas eſſe.
oniam duo anguli AGH, & C
G ſupponuntur æquales duobus
tis; & ſunt *i* duo anguli DHG
CHG deinceps, æquales duobus
tis. Ergo duo anguli AGH, &
HG, ſimul ſumpti, æquales ſunt
obus angulis DHG, & CHG,
blato *l* communiter angulo CH
erunt duo anguli AGH, & D
alterni, æquales inter ſe; &
, ex prima parte, rectæ AB &
parallelæ erunt. Quæ omnia
ndenda fuerant. *i prop. 12.* *l Axi. 3.*

EVCL. *prop.* 31 *I.* *Corollarium*. Conſtat, qua ratione à dato puncto duci poſſit recta linea, quæ parallela ſit alteri datæ. Si enim à puncto dato *m* ducatur perpendicularis ad datam rectam lineam; & *n* ab eodem puncto altera perpendicularis eleuetur ſuper alteram perpendicularem eductam: erit poſtrema perpendicularis parallela datæ rectæ lineæ. Nam in conſtructione primæ partis huius Propoſitionis à puncto G ducta eſt recta GM perpendicularis ad rectam CD; atque altera GN, perpendicularis ad ipſam MG, oſtenſa fuit parallela ipſi CD.

m *prop.* 12.

n *prop.* 10.

EVCL. 30. *I.* PROPOSITIO XVII. *Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ ſunt, inter ſe quoque parallelæ erunt.* Tabula I. Fig. 34.

Sint eidem AB, tam CD, quàm recta EF parallelæ. Dico CD, & EF & inter ſe parallelas eſſe. Secentur omnes à recta GN in punctis H, M, N. Quoniam CD, & AB parallelæ ponuntur. Ergo *a* alterni anguli AHM, & DMH æquales ſunt inter ſe. Rurſus quoniam EF, & AB ſunt parallelæ. Ergo *b* alterni anguli AHN, & FNH æquales ſunt inter ſe. Ergo *c* duo anguli HMD, & MNF æquales ſunt inter ſe, cùm ſint æquales vni tertio AHM. ſed in duabus rectis CD & EF, cùm

a *prop.* 15.

b *prop.* 15.

c *Axi.* 1.

ex-

ternus angulus HMD æqualis o-
nlus ſit angulo interno, & oppo-
ad eaſdem partes MNF. Ergo
uæ rectæ CD, & EF inter ſe quo- d *pro.16*
e parallelæ erunt. Quapropter,
.

ROPOSITIO XVIII. *Cuiuſcun-* EVC.I.
que trianguli, vno latere producto, 32.I.
externus angulus duobus internis,
& oppoſitis eſt æqualis. Et tres inter-
ni anguli eius æquales ſunt duobus re-
ctis. Tabula I. fig. 35.

Cuiuſlibet trianguli ABC, cuius
is BC productum ſit ad D: dico
mò externum angulum DCA æ-
lem eſſe duobus internis, & op-
itis A & B, ſimul ſumptis. Du-
r *a* ex C recta CE parallela ip- a *Corol. prop.16.*
B. Quoniam AC ſecat ambas
allelas AB, & CE. Ergo *b* an-
us ECA æqualis eſt alterno an- b *pr.15*
o A. Pari ratione BD, ſecans
iſq; parallelas CE, & AB, faciet
ternum angulum DCE æqualem c *prop. 15.*
rno, oppoſito, & ad eaſdem
es angulo B. Quare duo anguli
E, & ECA ſimul, ideſt *d* angu-
externus DCA, æqualis erit d *Axiom. 8.*
ous angulis B & A, ſimul ſum-
.

ico ſecundò angulos A, B, &
B internos eiuſdem trianguli,
l ſumptos, duobus rectis eſſe
ales. Quoniam DCA, externus

 oſten-

oſtenſus eſt æqualis duobus internis, & oppoſitis A, & B. Ergo addito *e* communi angulo ACB, erunt duo anguli DCA, & ACB ſimul, æquales tribus angulis A, B, & ACB ſimul ſumptis, ſed *f* duo anguli DCA, & ACB æquales ſunt duobus rectis. Ergo tres *g* anguli A, B, & ACB ſimul, æquales ſunt duobus rectis. Quod erat, &c.

e Axiom. 2. *f prop. 12.* *g Axiom. 1.*

Corollarium. Hinc patet externum angulum quolibet interno, & oppoſito maiorem eſſe; Et duos internos angulos, cuiuſlibet trianguli, minores eſſe duobus rectis. Quandoquidem externus oſtenſus eſt æqualis duobus internis, & oppoſitis, ſimul ſumptis: atque tres, ſimul ſumpti, quantitatem duorum rectorum complent.

EVCL. *prop. 16 17. I.*

PROPOSITIO XIX. *Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit.* Tabula I. Fig. 36

EVCL. *18. I.*

Sit latus AC maius latere AB in triangulo ABC. Dico angulum B maiorem eſſe angulo C. Ex maiore latere AC ſecetur *a* AD æqualis AB minori; iungaturque BD *b*. Ergo triangulum BAD iſoſcelium erit; ideoque anguli ſupra baſim ABD, & ADB inter ſe æquales: Eſt autem angulus ABC maior angulo ABD, totum ſcilicet ſua parte. Ergo

a prop. 3 *b prop. 6*

angulus ABC maior quoque
t angulo ADB. eſt *c* verò angulus *c Corol. prop. 18.*
DB externus in triangulo BDC,
ideò maior angulo C interno, &
poſito. Ergo multo magis angu-
ABC maior erit angulo C. Qua-
maiori lateri AC opponitur an-
lus maior ABC. Quod erat oſtē-
ndum.

ROPOSITIO XX. *Angulis æqua-ibus eiuſdem trianguli opponuntur latera æqualia. Et maiori angulo ma-us latus opponitur.* Tab. I. fig. 37. *EVCL. 6. & 19 1.*
Sit primò in triangulo ABC an-
lus A æqualis angulo C. Dico
s CB æquale eſſe lateri AB. Si
m hoc verum non eſt, ſit BC ma-
, aut minus, quàm AB. Ergo,
præcedenti, angulus A maior
minor erit, quàm C; quod eſt
tra hypotheſim. Non ergo CB
ius eſt, aut minus, quàm AB.
are illi ſit æquale neceſſe eſt;
od erat primo loco oſtenden-
.

it ſecundò angulus A maior, quã
Dico latus BC maius eſſe latere
. Si enim hoc verum non eſt:
BC, aut æquale, aut minus,
n AC. Sit æquale, ſi fieri po-
. Ergo *a* anguli B, & A æqua- *a prop. 6.*
runt inter ſe: poſitus autem fuit
lus A maior, quàm B. Ergo
t æquales, & inæquales, quod

eſt abſurdum. Non ergo BC æquale eſt ipſi AC.

Sit tertiò minus, ſi fieri poteſt. Ergo ex præcedenti minori lateri BC opponitur minor angulus A, quod rurſus eſt contra hypoteſim: ſupponebatur enim angulus A maior, quàm B. Non ergo latus BC minus eſt latere AC, ſed neque æquale oſtenſum fuit. Ergo BC maius erit, quàm AC. Quapropter, &c.

EVCL. 20. I. PROPOSITIO XXI. *Cuiuslibet trianguli duo latera tertio ſunt maiora; & differentia duorum laterum minor eſt reliquo*. Tabula I. Fig. 38. & 39.

Sit quodlibet triangulum ABC. Dico primò duo quælibet eius latera, vt BA & AC, ſimul ſumpta, maiora eſſe tertio latere BC. Producto latere CA verſus A, ſecetur (a prop. 3) *a* DA æqualis ipſi BA, iungaturque recta BD. Quoniam in triangulo BAD duo eius latera BA, & DA æqualia ſunt inter ſe. Ergo (b prop. 6) *b* anguli ad baſim D, & ABD æquales ſunt inter ſe; eſtque angulus CBD maior partiali angulo ABD. Igitur angulus CBD maior eſt angulo D; (c pr. 20) & propterea *c* in triangulo CBD erit latus CD, angulum maiorem ſubtendens, maius latere BC: ſed DC æqualis eſt duabus rectis lineis BA, & AC, ſimul ſumptis (eo quod æqualibus BA & DA additur communis

nis AC) Ergo duo latera BA
AC, ſimul ſumpta, maiora ſunt
io latere BC.

ecundò ex maiore latere BC ſe-
ır *d* CH æqualis AC eritque d prop. 3
differentia duorum laterum BC,
A. Dico iam BH minorem eſ-
quàm BA. Quia duo latera
& CA maiora ſunt, quàm B
ſi ab eis tollantur æquales HC,
A: erit *e* BA, reſiduum maioris e *Axiom.* 4.
regati, maius, quàm BH.

OPOSITIO XXII. *Si ab extre-* EVCL. 21. I.
itatibus vnius lateris trianguli duæ
ictæ lineæ intra ipſum conueniant,
æ ſimul ſumptæ, minores erunt duo-
us reliquis trianguli lateribus, ſimul
mptis; maiorem verò angulum
ntinebunt. Tabula I. Fig. 40.
it triangulum ABC, & à punctis
C concurrant intra triangulum
rectæ BD, & CD in D. Dico
, CD ſimul, minores eſſe, quàm
, CA, ſimul ſumptæ; ſed angu-
BDC maiorem eſſe angulo BA
Producta BD, ſecet AC in E:
ıt *a* BA, AE, ſimul ſumptæ, a prop. 21.
ores, quàm BE; & addita com-
i EC, erunt *b* duæ BA, & AEC
ores duabus BE & EC ſimul. b *Axiom.* 4.
urſus *c* CE & ED ſimul, ma-
s ſunt, quàm CD; & addita c prop. 21.
mmuni DB, erunt *d* duæ CE, & d *Axiom* 4.
B ſimul, maiores duabus CD,

& DB. Quare AB, & AC ſimul ſumptæ, multo maiores ſunt, quàm BD & DC ſimul.

e Corol. prop. 18. Poſtea *e* angulus BDC externus in triangulo EDC maior eſt interno, & oppoſito CED: hic verò externus eſt in triangulo EAB, & ideo *f* maior interno, & oppoſito angulo A. Quare angulus BDC multo maior erit, quàm angulus A. Quod erat oſtendendum.

f Corol. prop. 18.

EVCL. 22. I. PROPOSITIO XXIII. *Datis tribus rectis lineis, triangulum conſtituere, cuius ſingula latera ſingulis datis rectis lineis æqualia ſint. Oportet autem, vt vnaquæque datarum linearum minor ſit reliquarum aggregato.* Tabula I. Fig. 41.

Sint tres rectæ lineæ A, B, & C, quarum duæ quælibet reliqua ſint maiores. Debet conſtitui triangulum, habens tria latera æqualia tribus datis rectis lineis. Sumatur quælibet recta linea DE indefinita, & in ea ſecetur *a* DF æqualis ipſi A,

a prop. 3

& ex reliqua ſecetur FG æqualis B; & tandem ſecetur GE æqualis C.

b poſt. 1 Deinde *b* centro G, interuallo GE circulus ENK deſcribatur. Et centro F, interuallo FD alius circulus DNH deſcribatur. Et quia ſingulæ rectæ DF, FG, & GE æquales ſunt ſingulis AB, & C; atque vnaquæque harum minor eſt aggregato duarum

reli-

eliquarum. Ergo duæ quælibet ip-
arum, DF, GE maiores ſunt ter-
a FG; ſunt verò eiuſdem circuli
adii FH, FD interſe æquales, &
GK æqualis eſt EG. Igitur FH
GK ſimul ſumptæ maiores ſunt
uam FG; & ablata communi por-
one FH remanet GK maior quam
H; & ideo punctum K peripheriæ
NE iacet intra circulum DNH,
terminus E iacet extra eundem
rculum. Ergo duæ peripheriæ E
K, & DNH ſe mutuo ſecant: ſe
cent in puncto N, & ducantur re-
æ FN & GN. Et quia *c* FN æ- c *Axiom. 12.*
ualis eſt ipſi DF, cùm à centro ad
eripheriam circuli DNH ducan-
r; eſtque recta A æqualis eidem
F. Igitur *d* FN æqualis eſt ipſi d *Axiom. 1.*
. Similiter GN & GE ſunt ra-
j eiuſdem circuli; & ideo *e* æqua- e *Axiom. 12.*
s: eſtque recta C æqualis eidem
E. Ergo *f* NG æqualis eſt ipſi f *Axiom. 1.*
; atque recta FG facta eſt æqualis
ſi B. Igitur trianguli FNG tria
tera æqualia ſunt tribus datis re-
is lineis A, B, & C. Quod erat
ropoſitum.

ROPOSITIO XXIV. *Ad datam rectam lineam, datunque in ea punctum, dato angulo æqualem angulum conſtituere*. Tabula II. Fig. 1. EVCL. prop. 23 I.

Sit data recta linea AB, ad pun-
um eius C, debet conſtitui angu-
lus

lus æqualis dato angulo E. Ducatur, vtcunque, recta DF, vt fiat triangulum DEF; poſtea *a* fiat triangulum CGH, cuius latera æqualia ſint tribus lateribus trianguli DEF, ſingula ſingulis, ita vt ad punctum C conueniant duo latera, CG quidem æquale ipſi DE, & CH æquale ipſi EF (fieri enim hoc poterit, cùm duo quælibet latera trianguli EDF reliquo ſint maiora) iam in his duobus triangulis omnia latera vnius æqualia ſunt omnibus lateribus alterius, ſingula ſingulis. Ergo *b* angulus C æqualis eſt angulo E; qui à lateribus GH, & DF æqualibus ſubtenduntur: Et hoc erat faciendũ.

a prop. 23.

b prop. 7

PROPOSITIO XXV. *Si in duobus triangulis fuerint duo anguli vnius æquales duobus angulis alterius, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quæ ſiue æqualibus angulis adiaceant, ſiue æqualibus angulis oppoſita ſint, erunt triangula ſimiliter æqualia.* Tabula II. Fig. 2.

EVCL. 26. I.

In triangulis ABC & DEF ſint latera AC & DF æqualia inter ſe, & angulus BAC æqualis angulo D, atque angulus ABC æqualis angulo E, ſiue ſint anguli BAC, & D æquales, pariterque anguli ACB, & F inter ſe æquales. Paret *a* in vtroque caſu tertium angulum vnius trianguli æqualem eſſe poſtremo angu-

a prop. 28.

lo

terius trianguli. Dico latera
& DE eſſe æqualia; pariterque
a CB, & FE inter ſe æqualia.
Si enim hoc verum non eſt,
B maius, aut minus, quàm DE:
tetur *b* AH æquale DE, iunga- b prop. 3
te recta CH. Et quia circa
les angulos A & D latera C
FD æqualia ſunt; pariterque
HA & ED ſunt æqualia.
r *c* in triangulis ACH, & DF c prop. 4
int anguli ACH, & F æquales
ſe. Erat autem angulus ACB
lis eidem angulo F. Ergo *d* d *Axiom.* 1.
inguli ACH, & ACB æquales
inter ſe, pars & totum, quod
mpoſſibile. Quare recta linea e *Axiom.* 9.
non eſt maior, neque minor,
ED, ſed æqualis erit. Eadem
ne latera CB & EF æqualia
. Quod erat probandum.

POSITIO XXVI. *Quadrilaum, cuius oppoſita latera ſunt pa-* EVCL. 34. 1.
lela, habet angulos oppoſitos, &
ra oppoſita æqualia inter ſe; at
diameter ipſum ſecat biſariam;
diametri viciſſim ſe ſe biſariam
nt. Vocetur talis figura Paralle-
rammum. *Et perpendicularis, à*
mitate ad oppoſitam baſim ducta,
tetur Altitudo *Parallelogrammi.*
bula II. Fig. 3.
quadrilaterum BD, cuius dia-
AC, ſintque latera AB & D
C

C parallela inter ſe; pariterque latera AD, BC ſint parallela. Dico primò latera AB & DC inter ſe, nec non latera AD & BC æqualia eſſe. Secundò angulos B, & D inter ſe, nec non angulos BAD, BCD inter ſe æquales eſſe. Tertiò triangula ABC, & ADC, ſecta à diametro, æqualia eſſe. Quartò diametros A C, & BD ſe ſe mutuò bifariam ſecare in E. Quoniam in quadrilatero AC latera oppoſita AB, & DC ſunt parallela, & ſecantur ab AC. Ergo
a prop. 15. *a* anguli alterni BAC, & DCA æquales inter ſe ſunt. Similiter quia
b Prop. 15. *b* rectæ AD, BC ſunt parallelæ, & ſecantur à recta AC. Ergo alterni anguli BCA, & DAC æquales ſunt inter ſe. Quare in triangulo BAC duo anguli ſupra baſim AC æquales ſunt duobus angulis trianguli DA C, ſuper eandem baſim adiacentibus, ſinguli ſingulis; & ideo
c prop. 25. *c* erunt triangula BAC, & DAC ſimiliter æqualia; & propterea quadrilaterum ipſum BD, ſectum erit à diametro AC bifariam. Poſtea latera AB, & DC, oppoſita angulis æqualibus alternis inter ſe; nec non latera oppoſita AD, & BC æqualia erunt. Deinde duo anguli oppoſiti B & D æquales erunt, quia eidem baſi AC opponuntur. Ruſus quia æqualibus angulis DAC, & BCA adduntur anguli æquales BAC & D

CA

. Ergo d toti anguli oppoſiti D , & BCD æquales inter ſe erunt. ıdem quia in triangulis ABE & E, duo anguli BAE & DCE æ- les oſtenſi ſunt, & anguli AEB, ED ad verticem ſunt e æquales; uo latera AB, & CD, ſubten- ia angulos æquales, oſtenſa ſunt alia. Ergo f AE ipſi EC æqualis nec non BE ipſi ED æqualis Quare patet propoſitum. Vo- r figura ABCD *Parallelogram-* Et recta à ſupremo latere AB ppoſitam baſim DC perpendi- riter ducta, vocetur *Altitudo llelogrammi.*

d *Axi-om.* 2.

e *Corol. prop.* 5.

f *prop.* 25.

)POSITIO XXVII. *Si in qua- ilatero anguli oppoſiti inter ſe, aut tera oppoſita fuerint æqualia, vel lo latera oppoſita tantùm ſint pa- llella, & æqualia, erit ſemper Pa- llelogrammum.* Ta. II. Fig. 4. nt primò in quadrilatero BD ıli B, & D inter ſe, pariterque C æquales. Dico B D paral- grammum eſſe. Quoniam A & ualibus, ſi addantur anguli æ- s D ipſi A, & B ipſi C: erunt uli A, & D ſimul, æquales duo- & B: ſed quatuor b anguli libet quadrilateri æquales ſunt or rectis: cum diuidi poſſit in riangula. Ergo duo anguli A, ſimul, duobus rectis ſunt æqua- les;

EVCL. 33. 1.

a *Axi-om.* 2.

b *ex pr.* 18.

les;& ſunt interni ad eaſdem partes. Ergo *c* AB & DC parallelæ erunt; Eadem ratione AD, & BC parallelæ erunt; ideoq; ſpatium BD parallelogrammum erit.

c Prop. 16.

Sint ſecundò duo latera oppoſita **AB** & **DC** æqualia inter ſe, pariterque **DA**, & **BC** æqualia. Dico ſpatium eſſe parallelogrammum. Ducta diametro BD, erunt in triangulis **ABD**, & CBD ſingula latera ſingulis lateribus æqualia, & BD latus commune. Ergo *d* erunt ſimiliter æqualia, ideoque anguli oppoſiti A, & C æquales erunt, atque **ADB**, **CBD** inter ſe, nec non anguli ABD, CDB æquales erunt inter ſe. Quare *e* duo anguli **ADB**, & CDB, ſimul ſumpti, atque CB D & **ABD**, ſimul ſumpti, æquales erunt inter ſe. Igitur ex prima parte huius ſpatium ipſum erit parallelogrammum.

d prop. 7

e Axiom. 2.

Tertiò ſint latera oppoſita AB, & CD parallela, & æqualia tantummodo, idem ſequetur. Si enim hoc verum non eſt, ducta *f* BE parallela ipſi AD, fiet parallelogrammum ADEB. Cadet ergo recta BE citra, aut vltra punctum C. Ergo *g* latus D E æquale erit oppoſito AB, ſeu DC, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alibi, quàm in C puncto, cadit BE parallela ipſi **AD**. Quare ſpatium

f Corol. prop. 16

g Prop. 26.

AC

A C parallelogrammum eſt.

PROPOSITIO XXVIII. *Datam rectam lineam in quotcunque æquales partes diuidere.* Tabula II. Figura 5. EVCL. 9. VI.

Sit data recta linea AC, ſecanda datam multitudinem partium æqualium. Ducatur à puncto A recta B, efficiens in A quemlibet angulum CAB, & in AB ſecetur quodlibet ſegmentum AD, & fiant *a* ſuccesſiuè partes DE, EF, FB æquales ipſi AD, quæ tot ſint, quot partes æquales in AC debent contineri; iungaturque recta BC, & à punctis D, E, F intra triangulum ABC ducantur *b* rectæ DG, EH, FM parallelæ baſi BC, quæ ſecent rectam in G, H, M. Dico rectam AC eſſe in partes imperatas: à punctis D, E, F ducantur *c* rectæ DN, EO, FK parallelæ ipſi AC, ſecantes proximas parallelas in N, O, K. Et *d* quoniam, propter parallelas oppoſitas, ſpatium GDNH parallelogrammum eſt, erit *e* DN æqualis ipſi GH; cùmque in triangulis DNE, & AGD externus *f* angulus NDE æqualis ſit interno, & oppoſito angulo A, propter parallelas AC; atque *g* internus angulus æqualis ſit externo, & oppoſito angulo GDA, propter parallelas GD; atque duo latera adiacen-

a prop. 3 b Corol. prop. 16 c Corol. prop. 16 d Prop. 26. e Prop. 26. f prop. 15. g prop. 15.

centia, DE, AD æqualia ſint facta.
h prop. 25. Ergo *h* latera DN, & AG æqualia ſunt inter ſe: erat autem GH æqualis eidem DN. Igitur *i* GH æqualis eſt ipſi AG. Eadem ratione H
i axio. 1 M, & MC oſtendentur æquales eidem AG. Quare AC ſecta erit in tot partes æquales AG, GH, HM, MC, quot ſunt partes imperatæ, contentæ in recta AB. Et hoc erat faciendum.

Corollarium. *Facilè deducitur ex conſtructione & demoſtratione huius propoſitionis, quod ſi duæ rectæ angulum continentes diuidantur in totidem partes æqueles: Recta coniungentes puncta ſimilium diuiſionum erunt parallela inter ſe.*

Si enim HE non eſt parallela GD, ducatur HI parallela ipſi GD. Ergo ſicut GH æqualis ponitur ipſi AG; ita DI æqualis eſſe debet AD ſeu ei æquali DE. Quod eſt abſurdum: ergo ipſamet HE parallela eſt GD, & ſic reliquæ.

EVCL. poſt. V. vel axio. XIII. PROPOSITIO XXIX. *Si duo anguli interni ad eaſdem partes eiuſdem lineæ rectæ, ſecantis duas alias rectas, fuerint minores duobus rectis angulis: illa recta linea, producta, triangulum conſtituent.* Tab. II. Fig. 6.

Sint duo anguli DAB, & CBA minores duobus rectis. Dico rectas line-

lineas AD, & BC concurrere ad partes D,C, & efficere triangulum. Ab A cadat AO perpendicularis ſuper BC eam ſecans in O; quia externus angulus COA æqualis eſt duobus internis & oppoſitis angulis B & BAO in triangulo OAB; ergo addito communiter angulo OAD, erunt duo anguli COA & OAD æquales tribus angulis B, BAO & OAD, ſeu B & BAD ſimul ſumptis; ſed hi minores erant duobus rectis. Ergo rectus angulus COA vna cum OAD minores ſunt duobus rectis, & ideo angulus DAO acutus eſt: à quolibet puncto E rectæ DA cadat perpendicularis EF ſuper AO, & quod EF cadit ad partes anguli acuti DAO inter puncta A & O. Deinde ſecentur FK, KM, MH ſingulæ æquales ipſi AF quouſque AH maior efficiatur quam AO; & ſecentur partes ED, DI, IX ſingulæ æquales eidem AE, quæ totidem ſint in AH continentur, & connectatur XHG quæ (ex præcedenti corollario) parallela erit ipſis F BOC; & ideo conſurget triangulum AGX in quo à puncto B ducta recta BC intra ipſum triangulum AGX parallela baſi GX. BC producta ſecabit reliquum latus ADX alicubi vt in ... quod erat &c.

PRO-

PROPOSITIO XXX. *Si in duobus parallelogrammis unus angulus uni angulo æqualis fuerit, atque baſes inter ſe, pariterque altitudines æquales fuerint: etiam parallelogramma erunt æqualia inter ſe.* Tabula II. Fig. 7.

In duobus parallelogrammis BD, & FH ſint anguli B, & F æquales, & baſes BC, FG æquales, atque perpendiculares, ſeu altitudines AK, EN æquales. Dico parallelogramma BD, FH æqualia eſſe. Ducantur diametri AC, EG. Quia in triangulis ABK, EFN ſunt anguli B & F æquales, & duo anguli recti K & N, atque latera AK, EN æqualia, quæ oppoſita ſunt angulis
a prop. 25. æqualibus. Ergo *a* BA, FE æqualia ſunt. Et quoniam circa angulos æquales B, F, latera AB, EF ſunt æqualia, atque latera BC, FG ſunt
b prop. 4 pariter æqualia. Igitur *b* triangula
c pro. 26 ABC, EFG æqualia ſunt, & *c* eorum dupla parallelogramma BD, FH æqualia quoque erunt. Quod, &c.

EVCL. 35. 30. *I.* PROPOSITIO XXXI. *Si duo parallelogramma non æquiangula baſes æquales, & altitudines æquales habuerint, erunt æqualia.* Tabula II. Fig. 8. 9. & 10.

In parallelogrammis AC, EG, æqui-

æquiangulis, ſint baſes BC, FG æ-
quales, & parallelogrammorum
ltitudines ſint etiam æquales. Di-
o parallelogrammà AC, & EG eſ-
e æqualia. Fiat *a* angulus CBK æ- *a pr.24*
ualis angulo F, & ducatur *b* CN *b Corol.*
arallela BK, & producta AD ſecet *prop.16*
parallelas BK, CN in K & N; fa- *c Corol.*
umque *d* erit parallelogrammum *prop.29*
CNK, cùm etiam AN ſit paral- *d Prop.*
la BC. Quoniam in triangulis A *26.*
, & DCN eſt *e* angulus CDN *e prop.*
ternus æqualis interno, & oppo- *15.*
angulo BAK (propter paralle-
AB, CD); pariterque *f* inter- *f prop.*
angulus CND æqualis eſt ex- *15.*
o BKA, in parallelis CN, BK,
uo *g* latera BA, CD, ſubtenden- *g prop.*
quales angulos, ſunt inter ſe *25.*
alia, cùm ſint latera oppoſita pa-
logrammi AC. Ergo *h* trian- *h prop.*
ABK, & DCN æqualia ſunt *25.*
ſe. Et (in primo & ſecundo
) addita *i* communiter figura *i Axi-*
K, erit parallelogrammum *om. 2.*
quale parallelogrammo BN.
n tertio caſu) *l* ablato com- *l Axi-*
er triangulo DOK, erunt qua- *om. 3.*
ra ABOD & NKOC æqua-
er ſe; additoque *m* communi
ulo BOC, erit pariter paral- *m axio.*
ammum ABCD æquale pa- *2.*
grammo BCNK. Iam quia
logramma BN, & AC ſunt
aſdem parallelas AN & BC,

erunt

n *prop.* 26. erunt *n* æquè alta; cùm omnes perpendiculares, ſeu diſtantiæ parallelarum AN & BC, æquales ſint. Poſita autem fuerunt parallelogramma FH & AC æquè alta. Igitur parallelogramma BN & FH æquè alta ſunt, & habent baſes BC, FG æquales inter ſe, atque angulos KBC & F æquales inter ſe. Ergo parallelogrammum *o* FH æquale eſt parallelogrammo BN: Sed oſtenſum fuit parallelogrammum AC æquale eidem parallelogrammo BN. Igitur *p* parallelogramma AC, & FH æqualia ſunt inter ſe.

o *Prop.* 30.

p *Axiom.* 1.

EVCL. 37. 38. 1. PROPOSITIO XXXII. *Triangula, quorum baſes æquales, & altitudines ſunt æquales, erunt æqualia inter ſe.* Tabula II. Fig. 11.

Triangula ABC, & DEF habeant baſes BC, EF æquales inter ſe, & perpendiculares, ſeu altitudines AO, DN à punctis A, D ad baſes BC & EF ductæ, ſint æquales. Dico triangula ABC, DEF eſſe inter ſe æqualia. Ducta *a* AG parallela ipſi BC, & CG facta parallela ipſi BA, fiat parallelogrammum ABCG. Pari ratione compleatur parallelogrammum EDFH. quoniam parallelogramma BG, & EH habent baſes BC, EF æquales, & altitudines æquales (cùm perpendiculares AO & DN ſint altitudines paral-

a *Coſol. prop.* 16

llelogrammorum BG & EH) b *prop.* 31.
o *b* parallelogramma BG & EH
alia ſunt inter ſe, & eorum ſe-
es *c* pariter æquales erunt: Sunt- c *Axiom.* 5.
d triangula ABC & DEF dimi- d *pr.* 26
parallelogrammorum B G &
Igitur triangula ABC & DEF
alia ſunt inter ſe. Quod, &c.

ollarium I. Manifeſtum eſt, ſi EVCL. 41. *I.*
llelogrammum, & triangulum
erint baſes æquales, atque al-
nes æquales, eſſe parallelogrã-
duplum ipſius trianguli.
bent enim parallelogramma B
triangulũ DEF baſes BC & E
uales, atque altitudines etiam
les; & oſtenſum fuit *e* triangu- e *pr.* 32
ABC æqualẽ triangulo DEF.
parallelogrammum BG (quod
lum eſt ipſius trianguli ABC)
uoque duplum alterius trian- f *pr.* 26
DEF.

llarium II. Patet etiam quòd,
int duo triangula æquè alta,
ſis vnius aliquoties metiatur
alterius, triangulum quoque
reliquum triangulum metie-
uoties baſis baſim metitur.
nim in triangulis ABC, DEF,
altis, ipſa baſis EF metiatur
ties baſim BC, vt verbi gratia
, atque à punctis diuiſionum
, & S, ad verticem A coniun-

gantur rectæ lineæ: diſtributum erit triangulum ABC in tot triangula ABM, AMR. ARS, ASC, quot ſunt baſes æquales BM, MR, RS, & SC. Suntque prædicta triangula æquè alta, tum inter ſe, tum ipſi DEF (quandoquidem à puncto A perpendicularis ad baſim BC ducta, altitudo communis eſt & æqualis altitudini trianguli DEF) & omnes baſes æquales ſunt. Igitur tri-
g prop. 23. angula *g* omnia, in quæ diſtribuitur triangulum ABC, æqualia ſunt, tum inter ſe, cùm ipſi triangulo DEF. Et propterea toties triangulum D E F metietur ipſum triangulum ABC, quoties illius baſis EF, huius baſim BC metitur.

EVCL. 42. I. PROPOSIT. XXXIII. *Dato triangulo, æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo*. Tab. II. Fig. 12.

Sit datum triangulum ABC, & angulus D. Deſcribendum eſt parallelogrammum æquale ipſi triangulo, habens angulum æqualem
a Pr. 9. angulo D. Secta *a* BC bifariam in E, ducatur AE, & angulus CEF
b pr. 24 fiat *b* æqualis angulo D, & CG du-
c Corol. prop. 16 catur *c* parallela ipſi EF, & AG du-
d pr. 26 catur parallela ipſi BC. Patet *d* ſpatium CF parallelogrammum eſſe: quod cùm habeat eandem baſim EC cum triangulo ACE; ſintque prædi-

dicta ſpatia inter eaſdem parallelas AG & EC. Ergo *e* parallelogrammum EG duplum eſt trianguli AEC; *f* ſed triangulum ABE æquale eſt triangulo AEC (cùm baſes BE & EC æquales, & eandem altitudinem habeant) Ergo duo triangula ABE & EAC ſimul, ideſt triangulum ABC, duplum erit trianguli AEC; Erat autem ſpatium EG duplum quoque eiuſdem trianguli AEC. Ergo *g* parallelogrammum G æquale eſt triangulo ABC. Quapropter dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

e Cor. 2 pro. 32.
f pr. 32
g Axiom. 5.

PROPOSITIO XXXIV. *Super data recta linea quadrilaterum deſcribere, cuius omnia latera æqualia ſint inter ſe, atque omnes eius anguli recti ſint. Vocetur talis figura* Quadratum. Tab. II. Fig. 13.

EVCL. 46. I.

Sit data recta AB, ſupra quam quadratum imperata deſcribenda eſt. Erigatur *a* CA perpendicularis ſuper AB, & *b* ſecetur CA æqualis AB; ducaturque *c* CD parallela ipſi AB & BD parallela alteri conueniens *d* cum DC in puncto D. Dico ſpatium parallelogrammum AD eſſe æquilaterum & æquiangulum. Quia AD parallelogrãmum eſt; Ergo *e* latus CD æquale oppoſito lateri AB; ſed eidem ex conſtructione eſt æquale

a pr. 10.
b pr. 3.
c Corol. pror. 16.
d Cor. prop. 29
e pr. 28

f Axiom. 1. CA. Ergo *f* CD æquale eſt ipſi
CA; Sed *g* rurſus eidem CA æqua-
g pr. 26 le eſt latus illi oppoſitum BD. Ergo
BD æquale eſt ipſi CD; eſtque
h pr. 26 eidem CD æquale latus *h* oppoſi-
tum AB. Ergo BD & AB inter ſe
ſunt æqualia. Patet ergo omnia
latera parallelogrammi AD æqua-
i pr. 15. lia eſſe inter ſe. Quoniam *i* verò in
parallelogrammo AD duo interni
anguli A & C æquales ſunt duobus
rectis; eſtque A, ex conſtructione,
rectus. Ergo C quoque rectus eſt.
l pr. 26 Cùmque *l* anguli B, & D ſuis op-
poſitis ſint æquales. Ergo erunt an-
guli B & D recti quoque; propte-
reaque anguli omnes figuræ AD
recti erunt. Deſcripſimus ergo ſu-
per AB figuram AD, quam oſtendi-
mus eſſe æquilateram & æquiangu-
lam, vt quærebatur. Vocetur illa
Quadratum.

Finis Libri primi.

LIBER II.

De Circulis.

DEFINITIONES.

RECTA linea circulum tangere dicitur, cùm in circulum incidens, eum non ſecat. I.

CIRCVLVS circulum tangere dicitur, cùm vnius peripheria, in alteram incidens, non ſecat circulum. Tab. II. Fig. 14. II.

Poſito circulo BFD, ſi aliqua recta AB incidens in circulum, & producta eum non ſecat, *Tangens* vocabitur; pariterque peripheria BH, ſi incidat in circulum BD & eum non ſecet, *Tangens* appellabitur. At ſi producta circulum ſecat, vocabitur *Secans*.

RECTA linea diciur applicari, ſeù coaptari circulo, cùm eius termini fuerint ad circuli peripheriam. Tabula II. Fig. 15. III.

Vt recta linea AB coaptata erit, vel applicata circulo ABC, quando termini A & B ipſius rectæ lineæ fuerint in ipſa peripheria circuli AB

SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur. Tabula II. Figura 16, 17, 18. IV.

Tam ſpatium B A D, quàm M NO, vel EFG *Segmentum circuli*

 di-

dicitur. Hæc autem ſegmenta varia nomina ſortiuntur. Si enim centrum circuli fuerit intra eius ſuperficiem, dicetur *Segmentum maius*, vt eſt E F G; ſi verò extra ipſum fuerit, vt in BAD, dicetur *Segmentum minus*. Et tandem ſi centrum fuerit in ipſa recta linea ſecante, vt in MNO, tale ſegmentum appellabitur *Semicirculus*.

V. *ANGVLVS in ſegmento dicitur ille, qui à duabus rectis lineis concurrentibus in vno puncto circumferentiæ, & terminatis in extremitatibus rectæ lineæ, quæ baſis eſt ſegmenti, continetur*. Tab. II. Fig. 19.

Vt in ſegmento ABC duæ rectæ lineæ AB & CB concurrentes in quolibet eius puncto B, eductæ à terminis A, C efficiunt angulum ABC, conſtitutum in dicto ſegmento.

AXIOMA.

Duo circuli, quorum radij ſunt inter ſe æquales, erunt æquales inter ſe. Et contra circulorum æqualium radij æquales ſunt.

EVCL. 1. & 25 lib. III. PROPOSITIO I. *Data circuli peripheria, reperire centrum circuli, cuius illa eſt peripheria*. Tabula II. Figura 20.

Sit data circunferentia ABC, ſiue integra, ſiue non. Debet reperiri cen-

centrum illius circuli, cuius ABC eſt peripheria. Sumantur in dicta circunferentia tria qualibet puncta A, B & C, & coniungantur rectæ A B & BC. Poſtea *a* ambæ bifariam ſecetur in punctis D & E, à quibus excitentur *b* perpendiculares, D F quidem ſupra AB & EF ſuper BC. Quia rectæ AB, BC non ſunt in directum, propter curuitatem peripheriæ ABC. Ergo coniuncta recta DE diuidet angulos rectos FDB & & FEB: & ideo duo anguli FDB & F E D minores erunt duobus rectis. *c* Quare D F, E F conuenient vt in F. Dico iam punctum F concurſus perpendicularium eſſe centrum illius circuli, cuius ABC eſt peripheria. Si hoc verum non eſt, ſit centrum circuli A B C punctum H, aliud quàm F, concurſus rectarum linearum DF, EF; ideoq; punctum H cadet, ſi non extra ambas, ſaltem extra vnam perpendicularium D F. Coniungantur rectæ AH, BH, DH. Quoniam in duobus triangulis AHD, DHB ſunt latera AD, B D aqualia, & D H commune, atque baſes AH, BH æquales, cum ſint radij circuli. Ergo *d* anguli ADH, BDH æquales ſunt; ideoque *e* recti: erat autem angulus ADF rectus. Igitur anguli A DF & ADH aquales ſunt inter ſe; pars & totum, quod eſt impoſſibile;

a pr. 9. lib. 1.

b prop. 10. l. 1.

c pr. 29 lib. 1.

d pr. 8. lib. 1.

e pr. 10. lib. 1.

Non ergo punctum H aliud, quàm F eſſe poteſt centrum circuli ABC, & propterea id ipſum punct ũF centrum erit. Quod erat faciendum.

EVCL. 3. III. PROPOSITIO II. *Si applicatarum in circulo quadam recta linea per centrum extenſa, aliam, non per centrum ductam, bifariam ſecet: ad angulos rectos eam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque ſecabit*. Tab. II. Fig. 21.

Per centrum A, circuli DBC, recta CE applicata, diuidat rectam BD, non per centrum extenſam, bifariam in F. Dico rectam CF perpendicularem eſſe ſupra BD. Ductis radijs BA & AD, erunt in triangulis AFD & AFB duo latera BF & FD æqualia, ex hypotheſi, & FA commune, & baſes AB & AD æquales, cùm ſint radij circuli. Ergo *a* anguli AFB & AFD æquales erunt, ideoque *b* recti. Quod erat primum.

a pr. 7. lib. 1.
b pr. 10. lib. 1.

Secundo AF per centrum ducta, ſit perpendicularis ad DB. Dico BD in F bifariam ſectam eſſe. Si enim hoc verũ non eſt, ſecetur *c* BD bifariam in H alibi, quã in F; & iungantur ex centro rectæ lineæ AH, AB, AD. Et quia AH per centrum extenſa, ſecat rectam BD bifariam in H. Ergo (ex prima parte) angulus AHB rectus eſt: Erat autem an-

c pr. 9. lib. 1.

angulus AFB rectus. Igitur in triangulo A H F externus angulus AHB æqualis eſt interno, & oppoſito angulo F. Quod *d* eſt abſurdum. Non ergo BD alibi, quàm in F ſecari poteſt bifariam. Quare patet propoſitum. d Cor. po. 18. I.

PROPOSITIO III. *Si applicatarum in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuò ſecent, non per centrum extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.* Tab. II. Fig. 22. EVCL. 4. III.

In circulo ABD duæ rectæ lineæ AB & CD ſe mutuò ſecent in E, ſed non ambæ applicatæ per centrum F ſint ductæ. Dico non poſſe ſe ſe mutuò bifariam ſecare. Si enim vna earum per centrum tranſit, non ſecabitur bifariam ab altera non tranſeunte per centrum; eo quod ſolummodo in centro diameter bipartitur. Sed ſi neutra per centrum tranſit, ex centro F ducatur recta FE ad concurſum E. Oſtendendum eſt rectas AB & CD in puncto E ſe ſe non ſecare bifariam. Si enim hoc verum non eſt, ſint ambæ in puncto E ſectæ bifariam. Et quoniam FE, per centrnm dncta, ſecat bifariam AB. Ergo *a* ad angulos rectos eam ſecabit. Eadem ratione recta CD ab ipſa FE ſecabitur ad rectos angulos. Quare anguli FEB & FED recti erunt. Ideoq; æqua- a pr. 2. lib. 2.

 les

les inter ſe; pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo ambæ rectæ AB & CD in puncto E ſe ſe bifariam ſecant. Quapropter, &c.

EVCL. 2. III. PROPOSITIO IV. *Si in circuli peripheria duo qualibet puncta accepta fuerint, recta linea ipſa puncta coniungens, intra circulum cadet.* Tab. II. Fig. 23.

In circulo ABE recta linea AB coniungat duo qualibet puncta, in eius peripheria aſſumpta, A & B. Dico rectam AB intra circulum cadere. Sumpto enim quolibet puncto intermedio D in recta AB, à centro C coniungantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam in triangulo iſoſcelio CAB duo latera CA & CB æqualia ſunt. Ergo *a* anguli, ſupra baſim, A & B æquales inter ſe erunt. Eſt autem angulus CDA externus *b* maior interno B in triangulo CBD. Igitur idem angulus CDA maior erit angulo CAD; & propterea *c* latus AC, oppoſitum maiori angulo, maius erit latere DC. Quare recta CD minor erit radio circuli CA; ideoque CD ad peripheriam circuli non peruenit. Vnde punctum D intra circulum exiſtet. Eadem ratione quodlibet aliud punctum ipſius rectæ AB intra circulum cadet, & propterea ipſamet recta linea AB, intra circulum

a prop. 6 lib. 1.

b Corol. pr. 18.

c pr. 20 lib. 1.

lum

lum extenſa erit. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO. V. *Si duo circuli ſe ſe mutuò ſecent, ſiue interius tangant, non erit eorum idem centrum.* EVCL. 5. & 6. III.

Tabula II. Fig. 24.

Sint duo circuli AB & AC, qui ſe ſe ſecent, vel tangant in puncto A. Dico ipſos non habere idem centrum. Si enim fieri poteſt, ſit vtriuſque centrum D; à quo recta DA ad tactum, vel ſectionem ducatur, & altera DCB, ſecans vtramque peripheriam in punctis C & B. Quoniam D eſt centrum circuli AB. Ergo *a* radius BD æqualis eſt radio DA. Rurſus quoniam D ponitur centrum circuli AC, erit radius CD æqualis eidem radio DA: ideoque duæ rectæ BD & CD æquales erunt inter ſe; pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo duo circuli AB & AC commune centrum D habere poſſunt. Quod erat oſtendendum.

a Axi. 12. lib. 1.

PROPOSITIO VI. *Rectarum, ad peripheriam cadentium à puncto, quod circuli centrum non eſt, maxima eſt illa, quæ per centrum tranſit; minima verò reſiduum, vel productio diametri; reliquarum verò quæ maiorem angulum ad centrum ſubtendit maior erit ſubtendente angulum mi-* EVCL. 7. & 8. III.

norem; duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto ad vtraſque partes diametri cadent. Tabula II. Fig. 25. 26.

In circulo AGB, cuius centrum C, ſumatur quodlibet punctum D, aliud à centro (ſiue intra, vt in vigeſima quinta figura, ſiue extra circulum, vt in vigeſimaſexta, ſiue in eius peripheria) & à puncto D ducantur ad circuli peripheriam quotcunque lineæ rectæ DB, DM, DH, DG, DF, DE, DA & DN, quarum DB per centrum tranſeat. Dico rectam DB maximam eſſe omnium. A centro C ad puncta M, H, G, &c. coniungantur radij CM, CH, CG, &c. Quoniam

a *Axi.* 12. *lib.* 1. duo *a* radij CM & CB æquales ſunt, addita communi CD, erunt duæ rectæ MC & CD ſimul ſumptę, æquales rectæ BD; ſed *b* DM minor eſt,

b *prop.* 21. *lib.* 1. quàm duo latera CM & CD ſimul, in triangulo MCD. Ergo MD minor eſt, quàm BD. Eadem ratione minor erit DH, quàm BD, & ſic reliquæ omnes DG, DF, &c. Quare recta BD, quæ per centrum ducitur, maxima eſt omnium, &c. Quod erat primum.

Secundò dico, quod DA (quæ eſt reſiduum diametri in prima figura, & eius productio in ſecunda) eſt minima omnium rectarum, quæ à puncto D duci poſſunt in circulo.

Quo-

Quoniam in triangulo DCE eſt D
, differentia duorum laterum D
 & EC ; eo quod CE & CA , ra-
ij circuli, æquales inter ſe ſunt.
Ergo c erit DA, differentia laterum, c prop. 21. lib. 1.
minor, quàm baſis DE. Eadem
ratione erit DA minor qualibet alia
DF, aut DG, aut DN, &c. Qua-
re DA minima eſt omnium, quæ à
puncto D in circulum duci poſſunt.
Quod erat ſecundum.

Tertiò quælibet recta DG ſub-
tendat angulum GCD, ad centrum,
maiorem angulo FCD, ſubtenſo à
recta FD. Dico DG maiorem eſſe,
quàm DF; & ſiquidem DG ſecat
radium FC intra circulum in
puncto O (vt in primo caſu). Quo-
niam d in triangulo GOC duo d prop. 21. lib. 1.
latera GO & OC maiora ſunt, quàm
GC; pariterque in triangulo DOF
duo latera DO, & OF ſimul ſum-
pta, maiora ſunt, quàm FD. Qua-
re quatuor rectæ lineæ GO, OD,
FO & OC, ideſt duæ GD & FC,
ſimul ſumptæ, maiores erunt duabus
FD & GC; & ab his aggregatis
inæqualibus auferantur æquales ra-
dij GC & FC; relinquetur e GD e Axi. 4 lib. 1.
maior, quàm FD. Si verò DG non
ſecat radium FC (vt in ſecundo ca-
ſu) Quoniam intra triangulum
DGC concurrunt rectæ lineæ DF
& CF, à terminis baſis DC ductæ ;
Ergo f duæ CG & GD, ſimul ſum- f prop. 21. lib. 1.
ptæ

ptæ, maiores ſunt, quàm duæ CF & FD; & ab his inæqualibus aggregatis tollantur æquales CG, CF, radij circuli: erit g reſidua GD maior reſidua FD.

g *Axi. 4. lib. 1*

h *prop. 24. lib. 1.*

Quartò fiat h angulus ad centrum DCN æqualis angulo DCE, & coniungatur DN. Quoniam in triangulis DCN & DCE circa angulos æquales ad centrum habent latera NC & CE æqualia (cùm ſint radij circuli), & CD latus commune. Ergo l baſes DN & DE æquales ſunt; ſed quælibet alia, quæ vltra punctum E, vt eſt DF, ducitur, maior oſtenſa eſt, quàm DE, eo quod maiorem angulum ad centrum DCF ſubtendit. Ergo maior quoque erit, quàm DN. Rurſus quælibet alia ducta citra DE verſus punctum A minor oſtenſa eſt, quàm DE. ergo minor quoque erit, quam DN. Vnde duæ ſolummodo DN & DE æquales duci poſſũt ad vtraſque partes diametri. Quod erat oſtendendum.

l *prop. 4 lib. 1.*

EVCL. 9. III.

Corollarium I. Si in circulo acceptum fuerit punctum, & ab eo ad peripheriam cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales inter ſe: acceptum punctum centrum erit circuli. Quia à quolibet puncto, quod centrum non eſt, duæ ſolummodo rectæ lineæ æquales duci poſſunt,

ſunt, & non plures, vt conſtat ex poſtrema parte propoſitionis. Ergo punctum, àquo plures, quàm duæ rectæ, æquales cadunt, non poterit eſſe non in centro collocatū. Quare centrum ſit neceſſe eſt.

Corollarium II. Colligitur ex tertia parte huius propoſitionis, quòd, ſi fuerint duo triangula, habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, angulus verò cōprehenſus maior angulo comprehenſo à dictis lateribus: erit baſis maior baſe. In triangulis enim D CM & DCH latera MC, HC æqualia erant, & latus DC commune, & angulus DCM maior angulo DCH, & oſtenſa fuit baſis DM maior baſe DH. E conuerſo ſi DM maior ſit quam DH erit angulus M CD maior angulo DCH, quia DM magis recedit à termino A peripheriæ quam DH. EVCL. *24. & 25. I.*

PROPOSITIO VII. *Circulus circulum in pluribus, quàm in duobus punctis, non ſecat.* Tabula II. Fig. 27. EVCL, *10. III.*

Secent ſe duo circuli ABCD, ARHD, ſi fieri poteſt, in tribus punctis A, B, & D; & reperto *a* centro O circuli ABC, ab eo ducantur radij OA, OB & OD ad tria puncta ſectionum circulorum, qui radij æqua- *a prop. I huius.*

quales erunt inter ſe. Et quoniam intra circulum alium ARBH ſumptum eſt punctum O, & ab eo cadunt in circuli peripheriam plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales OA, OB & OD. Ergo *b* punctum O centrum eſt circuli ARBH; erat autem idem punctum O centrum alterius circuli ABC. Ergo duo circuli, ſe ſe ſecantes, habent idem centrum, quod *c* eſt abſurdum. Non ergo duo circuli ſe ſe ſecant in pluribus, quàm in duobus punctis. Quod erat oſtendendum.

b Corol. prop. 6. huius

c prop. 5 huius.

EVCL. 11. & 12. III. PROPOSITIO VIII. *Recta per centra duorum circulorum ſe tangentium producta, per contactum tranſibit.* Tabula II. Fig. 28. 29.

Sint duo circuli AE, cuius centrum B & AD, cuius centrum C ſe ſe interius, vel exterius tangentes in A. Dico duo centra B, C & contactum in vna recta lineæ eſſe. Si hoc verum non eſt, recta linea BC, centra coniungens (producta), ſecet peripheriã circuli AE in punctis H, E & peripheriã circuli AD in puncto D. Et quoniam ſũptum eſt punctum C, quod non eſt centrum circuli AEH (intra ipſum in prima figura, & extra in ſecunda) atque à puncto C per centrum B ducta eſt recta linea CEBH: erit *a* CE, (quæ eſt reſiduum diametri HE)

a prop. 6 huius.

HE) minima omnium rectarum, ex puncto C cadentium in peripheriam circuli AEH. Ergo CE minor eſt, quàm CA; eſtque *b* CA radius æqualis radio CD in circulo AD. Ergo CE minor erit, quàm CD, totum minus ſua parte, quod eſt abſurdum. Non ergo recta BC, centra coniungens (producta) ſecat circulos alibi, quàm in eorum contactu A. Quod erat oſtendendum.

b *Axio 12. lib. 1.*

PROPOSITIO IX. *Circulus circulum in vno tantùm puncto, ſiue intus, ſiue extra tangit.* Tabula II. Fig. 30.31.

EVCL. 13. *III.*

Circulus CE, cuius centrum A, tangat circulum CD, cuius centrum B, in C (interius quidem, vt in prima figura, exterius, vt in ſecunda) Dico in vnico puncto tantummodo circulos ſe tangere. Ducta per contactum C, & per centra B & A recta linea BAC, quæ vnica recta erit, vt in proxima propoſitione oſtendimus, & producta ad punctum G, & ducta, vtcunque, alia recta AED, ſecante peripherias circulorum in punctis E & D. Quoniam in circulo CD ſumptum eſt punctum A, quod non eſt eius centrum, atque ab eo ductæ ſunt plures rectæ AC & AD, eſtque AC complementum diametri CG: Ergo *a* AC minima eſt omnium, ideo-

a *prop. 6. huius*

ideoque minor, quàm AD; ſed AE æqualis eſt ipſi AC, quia ſunt radij eiuſdem circuli CE. Ergo AE minor eſt, quàm AD: ideoque punctum D vltra punctum E conſtitutum eſt: & propterea punctum D peripheriæ CD extra circulum CE cadit; & ſic quodlibet aliud punctum peripheriæ circuli CD extra circunferentiam CE cadere oſtendetur. Cùm ergo omnia puncta peripheriæ CDG cadant extra peripheriam circuli CE, excepto puncto C. Ergo dicti circuli in puncto C tantummodo ſe ſe tangunt. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 14. III. PROPOSITIO X. *Perpendiculares, à centro ad æquales rectas lineas, in circulo applicatas ductæ, erunt inter ſe æquales. Et ſi perpendiculares inter ſe fuerint æquales, erunt quoque applicatæ inter ſe æquales. Dictæ perpendiculares vocentur* Diſtantia rectarum linearũ, *applicatarum à centro*. Tab. II. Fig. 32.

In circulo ABC, cuius centrum E, ſint applicatæ duæ rectæ æquales AB & CD: ad quas ſint ex centro E perpendiculares EF & EG. Dico EF & EG æquales eſſe. Coniungantur rectæ EA, EB, EC & ED. Quoniam in duobus triangulis ABE & DEC duo latera AE, BE æqualia ſunt duobus lateribus DE

&

& CE, atque baſes AB & DC ponuntur æquales: Ergo *a* erunt anguli A & D æquales inter ſe; cùmque in triangulis AFE, DGE ſint duo anguli recti F & G æquales; nec non anguli A & D oſtenſi æquales; atque latera AE & DE æqualia, ſubtendentia angulos rectos (cùm ſint radij eiuſdem circuli). Igitur *b* latera EF & EG (quæ ſunt perpendiculariter ex centro ad applicatas ducta) æqualia ſunt inter ſe. *a prop. 7. lib. 1.* *b prop. 25. lib. 1.*

Sint ſecundò perpendiculares E F & EG æquales. Dico applicatas AB & CD æquales eſſe. Si enim hoc verum non eſt, quælibet earum, vt CD, ſit maior reliqua, & perpendiculares EF, EG ex centro ſecant *c* eas bifariam in G & F. Ergo etiam GD, ſemiſſis maioris CD, erit maior, quam FA, medietas minoris. Secetur *d* iam ex maiori G D recta linea GH æqualis ipſi FA, iungaturque EH, quæ (producta) ſecet circumferentiam in O. Et quia in triangulis AFE & HGE circa angulos rectos F & G ſunt duo latera AF & HG æqualia, pariterque EF & EG fuerunt æqualia. Ergo *e* baſis EH æqualis erit baſi EA; eſtque EA circuli radius. Ergo E H æqualis eſt radio EA, ſiue EO, pars æqualis toto, quod eſt abſurdum. Non ergo CD maior erit, quàm AB. Eadem ratione non erit *c prop 2 huius.* *d prop. 3 lib. 1.* *e prop. 4 lib. 1.*

mi-

minor. Quare AB & CD æquales erunt, vt fuit propoſitum. Vocentur perpendiculares EF & EG diſtantiæ rectarum AB & CD à centro E.

EVCL. 15. III. PROPOSITIO XI. *Rectarum applicatarum in circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem centro propinquior remotiore ſemper maior eſt.* Tabula II. Fig. 33.

In circulo ABC, cuius centrum G, ſit diameter AF & HI propinquior centro, quàm CD. Dico maximam omnium eſſe AF & HI maiorem, quàm CD. Ducantur *a* diſtantiæ, ſeu perpendiculares ex centro, GK & GL ſuper CD & HI; erit GK diſtantia maior, quàm GL ex hypotheſi. Secetur *b* ergo GM æqualis ipſi GL, & per M ducatur *c* BME perpendicularis ad GM, & coniungantur rectæ GB, GC, GD & GE. Quoniam diſtantiæ GM & GL æquales ſunt. Ergo rectæ *d* BE & HI æquales inter ſe erunt: Et quia duæ rectæ BG & GE, quæ ſimul, æquales ſunt diametro AF, maiores *e* ſunt, quàm BE, erit diameter AF maior, quàm BE, ſeu, quàm HI. Eadem ratione AF maior erit quacunque alia CD. Poſtea quia duo latera BG & GE trianguli BGE æqualia ſunt duobus lateribus CG & GD alterius trianguli

a prop. 11. lib. 1.

b prop. 3. lib. 1.

c Prop. 10.

d prop. 10. huius.

e Prop. 21. lib. 1.

guli DGC, eſtque angulus BGE maior ſua parte angulo CGD. Ergo *f* baſis BE maior eſt baſe CD, ideſt HI maior eſt, quàm CD. Quapropter, &c. *f Corol. 2. prop. 6. huius*

PROPOSITIO XII. *In dato circulo rectam lineam applicare æqualem datæ rectæ lineæ; oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non eſſe maiorem.* Tab. II. Fig. 34. EVCL. 1. IV.

In circulo ABC, cuius diameter AC, debet applicari linea recta, quæ æqualis ſit datæ rectæ D; ſed oportet lineam D eſſe æqualem, aut minorem diametro AC. Si fuerit æqualis, factum erit problema: Si verò D minor fuerit diametro AC, ſecetur *a* AE æqualis ipſi D, & centro A, radio AE deſcribatur circulus EB, ſecans priorem in B, & iungatur recta AB. Dico lineam rectam AB problema efficere. Quoniam D æqualis facta eſt ipſi AE & AB æqualis eſt eidem AE (cùm ſint radij circuli EB). Ergo recta AB, applicata in circulo ABC, æqualis eſt datæ rectæ D. Quod erat faciendum. *a prop. 3. lib. 1*

PROPOSITIO XIII. *In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm eadem peripheria fuerit baſis angulorum.* Tab. II. Fig. 35. 36. 37. EVCL. 20. III.

In

In circulo ABC, cuius centrum D, conſtituantur ſuper arcum BC duo anguli BDC, ad centrum, & BAC ad peripheriam. Dico angulum BDC duplum eſſe anguli BAC. Ducatur recta AD coniungens angulos ad centrum, & peripheriam, & producatur vſque ad E infra angulum ad centrum, & primò ADE cadat in eandem rectam lineam AB. Quoniam *a* angulus externus BDC duobus internis, & oppoſitis A & C eſt æqualis in triangulo ADC; ſuntque *b* anguli A & C inter ſe æquales, cùm latera DA & DC ſint æqualia, nempe radij circuli. Ergo angulus BDC duplex eſt anguli BAC ad peripheriam.

a prop. 18. lib. 1.

q prop. 6. lib. 1

Secundò cadat recta ADE intra angulum BDC. Et quoniam *c* in triangulo BAD externus angulus EDB æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis B & DAB, qui æquales ſunt inter ſe, vt prius dictum eſt. Pari ratione in triangulo DAC externus angulus EDC æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis C & DAC, qui pariter æquales ſunt inter ſe. Ergo totus angulus BDC æqualis eſt quatuor angulis B, DAB, DAC & C: ſed duo anguli B & C ſimul æquales ſunt duobus reliquis, ideſt angulo BAC. Ergo angulus BDC duplus eſt anguli BAC. Quod erat ſecundum.

c prop. 18. lib. 1.

Ter-

Tertiò cadat ADE extra angulum BDC, & ſecet peripheriam in E. Et quoniam *d* in triangulo CDA iſoſcelio externus angulus EDC æqualis eſt angulis DAC & DCA inter ſe æqualibus, erit angulus EDC, æqualis angulo DAC bis ſumpto. Rurſus quia in triangulo ADB iſoſcelio externus angulus EDB æqualis eſt angulis DAB & DBA æqualibus, erit angulus EDB, æqualis angulo DAB bis ſumpto. Si ergo ab æqualibus angulis EDC & DAC bis ſumpto tollantur æquales anguli EDB & DAB bis accepto erunt reſidui BDC & BAC bis æquales inter ſe. Ergo angulus BDC duplus eſt anguli BAC. Quod erat oſtendendum. *d prop. 18. lib. 1.*

PROPOSITIO XIV. *In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe ſunt æquales. Et duo anguli æquales ſubtenſi ab eadem recta linea, ad eaſdem partes conſtituti, ſunt in eodem circuli ſegmento.* Tabula II. Fig. 38. 39. 40. EVCL. 21. III.

In circulo, cuius centrum E, exiſtant duo anguli A & B in ſegmento DABC. Dico eos eſſe æquales. Sit primò ſegmentum ſemicirculo maius; & à centro E coniungantur rectæ DE & CE. Quoniam *a* angulus E ad centrum duplus eſt tam ipſius anguli A, quàm anguli *a prop. 13. huius*

guli

guli B ad peripheriam; cùm omnes eandem peripheriã DC pro baſi habeant. Ergo anguli A & B inter ſe ſunt æquales.

Secundò ſit ſegmentum DABC, aut ſemicirculus, aut minor ſemicirculo; & coniungatur recta AB. Manifeſtum eſt ſegmentum ADHB maius eſſe ſemicirculo; & ideo (ex prima parte huius propoſitionis) duo anguli ADF & BCF in maiori ſegmento exiſtentes, æquales ſunt inter ſe: & ſunt *b* pariter duo anguli ad verticem BFC & AFD æquales inter ſe. Ergo *c* in triangulis ADF & BFC tertius angulus DAF æqualis erit reliquo angulo CBF.

b Corol. prop. 5. lib. 1.
c ex pr. 18. lib. 1

Tertiò ſint duo anguli ABC & ADC æquales inter ſe, ad eaſdem partes, ſubtenſi ab eadem recta AC; & eadem conſtructione qua in propoſitione prima huius libri vſi ſumus. Circulus deſcribatur, cuius peripheria tranſeat per puncta B C & A, cuius centrum ſit G. Oſtendendum modò eſt punctum D in eadem ſegmenti ABC peripheria reperiri, Si hoc verum non eſt, tranſeat, ſi fieri poteſt, per punctum O vltra vel citra D. Manifeſtum eſt duos angulos ABC & AOC in eodẽ ſegmento ABOC reperiri; *d* ideoque æquales eſſe inter ſe: erat autem ex hypotheſi angulus CDA æqua-

e ex prima parte huius

qualis eidem angulo B. Ergo duo anguli A D C & A O C æquales erunt inter ſe, externus interno, & oppoſitio in triangulo COD, quod e eſt abſurdum. Non ergo peripheria circuli ABC tranſit vltra, vel citra punctum D. Quare præcisè per D punctum tranſibit. Quod erat oſtendendum.

e *Corol. propoſ. 18. lib. 1*

PROPOSITIO XV. *Quadrilaterorum in circulo deſcriptorum anguli, qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales. Et ſi in quadrilatero anguli oppoſiti duobus rectis æquales fuerint, circulus per quatuor puncta quadrilateri tranſibit.* Tabula II. Figura 41. 42.

EVCL. 22. III.

In circulo, cuius centrum E inſcriptum ſit quadrilaterum quodlibet ABCD. Dico duos angulos oppoſitos ABC & ADC duobus rectis æquales eſſe. Ductis diametris quadrilateri AC & BD: erunt a anguli ABD & ACD in eodem ſegmento ABCD æquales inter ſe. Similiter erunt duo anguli CBD & CA D in eodem ſegmento C B A D æquales quoque inter ſe. Ergo duo anguli ABD & C B D, ideſt totus angulus ABC æqualis erit duobus angulis ACD & CAD ſimul. Ergo addito cõmuni angulo CDA, erunt in quadrilatero duo anguli oppoſiti ABC & CDA ſimul, æquales tribus

a *propoſ. 14. huius.*

angulis ACD CAD & CDA ſimul ſumptis; ſed *b* hi tres vnius trianguli æquales ſunt duobus rectis. Ergo duo oppoſiti ABC & CDA duobus rectis æquales ſunt. Eodem modo oſtendentur duo anguli oppoſiti BAD & BCD duobus rectis æquales. Patet ergo prima pars.

b prop. 18.lib.1

Secundò ſint in quadrilatero ABCD anguli oppoſiti B & D duobus rectis æquales; Dico circulum per puncta A, B, C, D tranſire. Ducta diametro CA circa triangulum ACB, circulus deſcribatur; *c* quem dico neceſſariò tranſire per punctum D. Si enim hoc verum non eſt, tranſeat, ſi fieri poteſt, per punctum E vltra, vel citra D; & coniungatur recta AE. Quoniam quadrilaterum ABCE circulo inſcribitur: Ergo (ex prima parte huius) duo anguli E & B, erunt duobus rectis æquales: erant autem ex hypotheſi anguli B & D duobus rectis æquales. Ergo hi duo illis duobus æquales erunt; & ablato communi angulo B, erit angulus E æqualis angulo D, quod eſt falſum, & contra coroll. 1. propoſ. 18. lib. 1. Non ergo peripheria circuli tranſit per punctum E vltra, vel citra D. Quare per puncta A, B, C, D tranſibit. Quod erat, &c.

c ex pro. 1. huius

PRO-

PROPOSITIO XVI. *In circulis æqualibus vel in eodem circulo anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti, inſiſtunt æqualibus peripherijs.* Tab. II. Fig. 43. EVCL. 26. III.

In circulis æqualibus, quorum centra G & H, ſint primò anguli ad centra G & DHF æquales. Dico peripherias AIC & DKF, (quæ ſunt eorum baſes) æquales eſſe inter ſe. Quoniam circuli æquales ſunt; Ergo *a* quatuor radij AG, CG, DH & FH ſunt æquales: Intelligatur circulus vnà cum trilineo ACG ſuperponi trilineo DHF, ita vt punctum G ſuper H, & recta AG ſuper HD cadat, & angulus G ſuper angulum H, cadent *b* neceſſariò duo puncta A & C ſuper D & F, propter æqualitatẽ angulorũ à radijs cõprehenſorũ, incident. His poſitis, neceſſe eſt peripheriam AIC cadere præcisè ſuper peripheriam DKF. Nam ſi caderet ſupra, vel infra, aut partim ſupra, partim infra ipſam, vt in DNF; tunc, ducta à centro H recta HKN, ſecante vtramque peripheriam in punctis K & N; quia HK æqualis eſt radio HD; pariterque HN æqualis eſt HD, quia *c* ſunt radij circulorum æqualium. Ergo HK & HN æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo peripheria AIC cadit ſupra, vel infra peripheriam DK

a Axi. hnius.

b Axi. 9. lib. 1

c ax huius.

DKF. Quare ſibi congruant neceſſe eſt; ideoque æquales erunt inter ſe. quod erat primo loco oſtendendum.

Sint ſecundò anguli ad peripheriam B & E æquales. Dico eos inſiſtere ſuper æquales peripherias AIC & DKF. Ducantur radij AG & GC, DH & HF. Quoniam *d* angulus G ad centrum duplus eſt anguli B: pariterque angulus DHF æqualis eſt duplo anguli E; eſtque duplum anguli B æquale duplo anguli E. Ergo anguli G & DHF æquales ſunt inter ſe, & ſunt ad centrum; Ergo peripheriæ AIC & DKF æquales ſunt inter ſe (ex prima parte) non ſecus in vno circulo eadem oſtendentur. Quapropter ſi anguli B & E æquales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

d *prop. 13. huius.*

Corollarium. Patet etiam angulos æquales ad centra duorum circulorum æqualium vnà cum peripherijs ſubtenſis comprehendere figuras æquales. Vocentur illæ *Sectores.*

Nam ex eo, quod anguli G & H ad centrum poſiti ſunt æquales inter ſe, oſtenſæ fuerunt figuræ GAIC & HDKF ſibi mutuò congruentes, & ideo æquales erunt. Quæ vocentur *Sectores.*

PRO-

PROPOSITIO XVII. *In circulis æqualibus vel in eodem circulo, anguli, qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti fuerint.* Tabula II. Fig. 44. EVCL. 27. III.

In circulis æqualibus, quorum centra G & H, ſuper æquales peripherias AC&DF inſiſtant primò anguli H & AGC. Dico eos eſſe æquales. Si enim hoc verum non eſt. Sit angulus AGC maior, vel minor angulo DHF. Et fiat *a* angulus AGI æqualis angulo H. erunt *b* igitur peripheriæ AI & DF æquales inter ſe; erat autem peripheria AC æqualis eidem DF. Ergo peripheriæ AC & AI æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo anguli AGC & H inæquales ſunt. Ergo patet, &c. Inſiſtant deinde anguli ABC & E, ad peripherias conſtituti, baſibus AC & DF æqualibus. Dico eos angulos eſſe æquales. Quoniam propter æqualitatem peripheriarum A C & DF anguli ad centra G & H æquales ſunt inter ſe (ex prima parte); hi verò dupli *c* ſunt angulorum ad peripherias B & E. Ergo B & E æquales ſunt inter ſe. Quod erat, &c.

a prop. 24. lib. 1
b prop. 26. huius
c prop. 13. huius

Corollarium Conſtat etiam, quòd, ſi in eodem, vel æqualibus circulis,

vna peripheria aliquoties reliquam metiatur, atque ipſis inſiſtant anguli ad centrum, vel ſectores; minor angulus maiorem, & minor ſector maiorem æquè metietur, quemadmodum minor peripheria maiorem metitur.

Si enim peripheria CI aliquoties metiatur ipſam AC, verbi gratia quater, atque à punctis diuiſionum ad centrum coniungantur rectæ lineæ, erunt omnes *d* anguli, vel *e* ſectores æquales tum inter ſe, cùm ipſi angulo, vel ſectori CGI, quandoquidem inſiſtunt peripherijs æqualibus. Et propterea angulus CGI toties metietur angulum AGC, vel ſector ſectorem, quoties peripheria CI metitur peripheriam AC.

d prop. 15. hu. e ex pr. 6. huius

EVCL. 28. & 29. III.

PROPOSITIO XVIII. *In circulis æqualibus vel in eodem circulo æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maior, minorem verò minor. Et æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt*. Tabula II. Fig. 45.

In circulis æqualibus, quorum centra G & H, ſint rectæ æquales AC & DF. Dico maiorem peripheriam ABC æqualem eſſe maiori DEF, & minorem AC æqualem minori DF. Ductis enim radijs AG, GC,

GC, DH & FH, erunt duo latera circa angulum G æqualia duobus lateribus circa angulum H, ſingula ſingulis, cùm ſint radij æqualium circulorum; ſuntque baſes AC & DF poſitæ æquales. Igitur *a* anguli G & H æquales erunt, & peripheriæ *b* AC & DF, quibus inſiſtunt, æquales quoque. Vnde reſiduæ circunferentiæ A B C & D E F, ex circulis æqualibus, æquales quoque erunt inter ſe. Quod erat primum. *a prop. 7. lib. 1* *b prop. 16. hu.*

Sint ſecundò peripheriæ ABC & DEF æquales, ſiue peripheriæ AC & DF æquales. Dico rectas AC & DF æquales eſſe. Facta eadem conſtructione; quoniam peripheriæ AC & DF æquales ſunt: Ergo *c* anguli inſiſtentes G & H æquales erunt; ſuntque latera circa angulos G & H æqualia (cùm ſint radij circulorum æqualium). Ergo *d* baſes AC & DF æquales erunt. Quod erat ſecundum. Quapropter, &c. *c prop. 17. hu.* *d prop. 4. lib. 1*

PROPOSITIO XIX. *Datam circuli peripheriam bifariam ſecare.* Tabula II. Fig. 46. EVCL. 30. III.

Sit BEC circuli peripheria cuius centrum A. Debet ſecari in duas æquales partes. Coniungantur radij AB AC; & bifariam ſecetur angulus BAC à recta AE. Quia duo anguli ad centrum BAE & EAC æ-

quales interſe in eodem circulo ducti ſunt ergo peripheriæ *a* BE & EC quibus inſiſtunt æquales ſunt interſe.

a prop. 16. hu.

EVCL. 31. III. PROPOSITIO XX. *In ſemicirculo angulus rectus eſt; qui autem in maiori ſegmento acutus, qui verò in minori ſegmento obtuſus eſt. Et circa angulum rectum circuli ſegmentum eſt ſemicirculus, & circa acutum angulum maius ſegmentum eſt, & circa obtuſum eſt ſegmentum minus* Tabula II. Fig. 47. 48. 49.

In circuli portione ABC ſit angulus ABC. Dico eum eſſe rectum in ſemicirculo; acutum in maiori; & obtuſum in minori ſegmento. Ducatur in ſemicirculo radius DB; & in reliquis ſegmentis diameter AE, & recta EC. In ſemicirculo quoniã in triangulo ADB duo latera AD & BD ęqualia ſunt, cũ ſint radij circuli: Ergo *a* anguli DAB & DBA æquales ſunt inter ſe. Eadem ratione in triangulo BDC duo anguli DCB & DBC æquales erunt. Ergo duo anguli BAD & BCD, ſimul, æquales ſunt duobus angulis ABD & CBD, ideſt integro angulo ABC; ſuntque *b* tres anguli trianguli ABC æquales duobus rectis. Ergo angulus ABC ſemiſſis erit duorum rectorum. ideoque rectus erit. At in alijs portionibus quia AE eſt diame-

a prop. 6. lib. 1.

b Prop. 18. lib. 1

meter erit in ſemicirculo angulus A CE rectus (ex prima parte): Ergo *c* AEC acutus erit; eſtque *d* angulus B æqualis angulo E, cùm ſint in eodem ſegmento. Ergo angulus AB C acutus erit in maiori ſegmento. Sed in portione minori ſunt *e* duo anguli oppoſiti E & B in quadrilatero ABCE, circulo inſcripto, æquales duobus rectis. Ergo *f* angulus B obtuſus erit.

c ex Pr. 18. lib. 1
d Prop. 14. hu.
e prop. 15. hu.
f prop. 12. lib. 1

Secundò ſit angulus ABC rectus, conſtitutus in ſegmento ABC. Dico eum eſſe ſemicirculum. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit ſegmentum maius, aut minus; ideoque angulus ABC erit obtuſus, vel acutus (ex ſecunda, & tertia parte huius) quod eſt contra hypotheſin. Non ergo ſegmentum eſt maius. Vnde ſemicirculus erit.

Tertiò ſit angulus B acutus. Dico ſegmentum ABC minus eſſe. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit, aut ſemicirculus, aut ſegmentum minus, ideoque angulus B erit aut rectus, aut obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo, &c.

Quartò ſit angulus B obtuſus. Dico ſegmentum ABC minus eſſe. Nam ſi hoc verum non eſt, erit ſemicirculus, aut ſegmentum maius. ideoque angulus B erit rectus, vel acutus, quod repugnat hypotheſi. Quaproter &c.

EVCL. 16. III. PROPOSITIO XXI. *In circulo recta linea, perpendiculariter ad diametrum ab eius extremitate erecta, extra circulum cadet, & in locum inter ipſam rectam lineam tangentem & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet.* Tabula III. Fig. 1.

In circulo ABH, cuius diameter AB, ab eius extremo puncto A ducatur *a* CAD perpendicularis ad rectam lineam AB. Dico CAD cadere extra circulum; atque in locum à tangente DA & peripheria comprehenſum, rectam lineam duci non poſſe. Ducatur à puncto quolibet E, ſumpto in recta linea AD ad alterum extremum diametri B, recta linea EB, ſecans peripheriam in H. Et quoniam *b* rectarum BA, BH in circulo ductarum, maxima eſt diameter BA. Ergo recta linea BA maior eſt, quàm BH. Et quia in triangulo BAE rectus eſt angulus BAE. Ergo *c* reliquus angulus AEB eſt acutus, & ideo minor recto. Quare *d* latus BE, ſubtendens maiorem angulum, maius erit latere BA; erat autem BA maior, quàm BH. Igitur BE maior erit, quàm BH; eſtque punctum H in circuli peripheria. Ergo punctum E extra circulum cadit; & ſic quodlibet aliud præter punctum A. Igitur tota recta linea AD extra circulum cadit. Po-

a prop. 10. lib. 1.
b prop. 11. hu.
c Corol. prop. 18. lib. 1.
d Prop. 20. lib. 1.

Poſtea à puncto A contactus ducatur quælibet recta linea AG infra tangentem; & fiat *e* angulus ABH æqualis angulo DAG. Quia duo anguli ABH & DAG ſunt æquales, addito communi angulo BAH; duobus angulis BAG & GAD, qui rectum angulum BAD conſtituunt, æquales erunt duo anguli HBA & BAH ſimul ſumpti. Quare hi duo æquales ſunt vni recto angulo; & ideo *f* conueniunt rectæ lineæ BH, AH, & *g* efficiunt reliquum angulum AHB rectum, *h* qui in ſemicirculo erit; & ideo recta GA circulum ſecat in punctis H & A. propterea recta linea HA intra circulum cadit. eadem ratione quælibet alia recta linea, infra tangentem ad punctum A ducta, neceſſariò circulum ſecabit. Quare duci non poteſt recta linea in locum à tangente, & peripheria comprehenſum. Quod erat, &c.

e prop. 24. lib. 1.

f prop. 26. lib. 1.

g Corol. prop. 20 huius.

h prop. 20. hu.

PROPOSITIO XXII. *A dato puncto, extra circulum poſito, rectam lineam ducere, quæ datum circulum tangat.* Tabula III. Fig. 2

EVCL. 17. III.

Ex puncto externo A ducenda eſt recta linea, tangens circulum BC, cuius centrum D. Ducatur recta A D, ſecans circulum in E; ſuperquam deſcribatur ſemicirculus DCA, ſecans illius circunferentiam in C; &

couiungantur rectæ AC, CD. Dico rectam AC tangere circulum BC in puncto C. Quia angulus ACD in ſemicirculo rectus eſt *a*. Ergo CA tanget circulum BC in C. Quod &c.

a ex 21 huius.

EVCL. 18. & 19. III.

PROPOSITIO XXIII. *Si circulum tangat aliqua linea recta, erit, quæ à centro ad contactum ducitur, perpendicularis ad tangentem. Et ſi ex puncto contactus perpendicularis excitetur, per centrum circuli tranſibit.* Tabula III. Fig. 3.

Recta AB tangat circulum CG, cuius centrum D, in puncto C, & iungatur recta CD. Dico primò rectam CD perpendicularem eſſe ad AB. Si hoc verum non eſt, ducatur *a* à puncto C ſuper CD perpendicularis EH. Manifeſtum *b* eſt rectam EH circulum tangere, & propterea *c* AB circulum ſecabit, quod eſt contra hypotheſin. Quare CD ad ipſam AB eſt perpendicularis. Quod erat primum.

a Prop. 10. lib. 1.

b ex pr. 21. hu.

c prop. 21. hu.

Sit ſecundò CD perpendicularis ad tangentem AB in puncto C contactus eius. Dico centrum circuli in CD reperiri. Si enim hoc verum non eſt, ſit F centrum circuli extra lineam CD, & iungatur FC. Patet, ex prima parte huius, FC perpendicularem fore ſuper AB. Quare duo anguli FCB & DCB recti

erunt

erunt; ideoque æquales, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo centrum F, extra lineam CD, reperiri poteſt. Quapropter, &c.

PROPOSITIO XXIV. *In circulo angulus, à tangente, & ſecante contentus, æqualis, eſt angulo in alterno ſegmento conſtituto. Et ſi angulus in alterno ſegmento poſitus æqualis fuerit ei, qui à ſecante, & incidente in circuli peripheriam, continetur, incidens recta circulum tanget.* Tabula III. Fig. 4.5.6. EVCL. 32. III.

Circulum CGE tangat recta AB in puncto C, à quo recta CE primò per centrum ducatur. Dico angulum ACE æqualem eſſe angulo F in alterno ſegmento; & angulum BCE æqualem eſſe angulo CGE. Quoniam *a* vterque angulus ACE & BCE rectus eſt *b* ſuntque anguli F & CGE in ſemicirculis quoque recti. Ergo angulus ACE æqualis eſt angulo F; & angulus BCE æqualis eſt angulo CGE. *a prop. 23. hu. b prop. 20. hu.*

Tranſeat ſecundò recta CG non per centrum, & diameter CF ducatur, & iungatur GF. Oſtendendum eſt angulum ACG æqualem eſſe angulo CFG, in alterno ſegmento, & angulum BCG æqualem angulo D. Quoniam *c* in ſemicirculo angulus CGF rectus eſt. Ergo *d* in triangulo CGF duo reliqui anguli *c prop. 20. hu. d pro. 18 lib. 1.*

guli GFC & GCF vni recto æquales erunt, ideſt ſunt æquales angulo *e* recto ACF. Ergo ablato communi angulo GCF, erit angulus ACG æqualis angulo CFG in alterno ſegmento. Poſtea *f* quoniam in quadrilatero CDGF duo anguli oppoſiti D & F duobus rectis æquales ſunt; pariterque *g* duo anguli ACG & BCG duobus rectis æquales: erant autem anguli ACG & CFG inter ſe æquales. Ergo reſidui anguli BCG & D æquales inter ſe erunt.

e prop. 23. hu.

f prop. 15. hu.

g prop. 13. lib. 1

Tertiò ab eodem puncto C peripheriæ CDE ducantur rectæ, CD quidem ſecans circulum, & AB in eum incidens; ſitque angulus ACD æqualis angulo E, in alterno ſegmento. Dico AB circulum contingere. Quoniam, ſi hoc verum non eſt, ducatur *h* GH, tangens circulum in C. Ergo *i* angulus GCD æqualis erit angulo E in alterno ſegmento: erat autem angulus ACD æqualis eidem angulo E. Ergo anguli ACD & GCD æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alia recta GH circulum tanget. Quare AB ſolummodo tangens erit. Quapropter, &c.

h ex pr. 21. hu.

i ex prima parte huius

PRO-

PROPOSITIO XXV. *Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo.* Tab. III. Fig. 7. 8. 9. EVCL. 33. III.

Super data recta AB, deſcribendum eſt ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo C. *a* Fiat angulus DAB æqualis angulo C; & ſi AB perpendicularis eſt ſuper AD, *b* ſecetur illa bifariam in E: Si verò non eſt perpendicularis, *c* excitetur AE perpendicularis ſuper AD, erit angulus EAB acutus, eo quod eſt differentia anguli BAD à recto; & fiat *d* angulus ABE æqualis angulo BAE acuto. Concurrent *e* ergo AE & BE in puncto E, & *f* erunt æquales inter ſe. Ergo circulus, centro E, interuallo EA deſcriptus, tranſibit per B, & *g* ipſum tanget recta DA, cum perpendicularis ſit ad radium AE. Ducantur à quolibet puncto G, ſegmenti AGB, duæ rectæ GA & GB. Oſtendendum eſt angulum AGB, in dicto ſegmento conſtitutum, æqualem eſſe dato angulo C. Quoniam *h* angulo DAB à tangente, & ſecante comprehenſo æqualis eſt angulus G, in alterno ſegmento; ſed eidem angulo DAB æqualis erat angulus C. Ergo anguli G & C æquales inter ſe ſunt. Deſcripſimus ergo ſegmentum AGB, in quo angulus G æqualis eſt dato angulo C, quod erat, &c.

a pr. 24 lib. 1.
b prop. 9. lib. 1
c prop. 10. lib. 1.
d prop. 24. lib. 1.
e prop. 29. lib. 1.
f prop. 20. lib. 1.
g ex pr. 21. hu.
h prop. 24. hu.

PRO-

EVCL. 34. III PROPOSITIO XXVI. *A dato circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum æqualem dato angulo.* Tabula III. Fig. 10.

Sit datus angulus D, & circulus ABC, à quo abſcindi debet ſegmentum, quod capiat angulum æqualem angulo D. Ducatur *a* EG, tangens circulum in A; Fiat *b* poſtea angulus EAB æqualis angulo D; & à quolibet puncto C, peripheriæ ACB, duæ rectæ CA & CB ducantur. Oſtendendum eſt angulum C æqualem eſſe angulo D. Quoniam *c* angulo EAB æqualis eſt angulus C in alterno ſegmento: eſtque eidem angulo EAB ex conſtructione, æqualis angulus D. Ergo angulus C æqualis eſt angulo D. Secuimus ergo ſegmentum ACB, in quo angulus C æqualis eſt dato angulo D. Quod erat faciendum, &c.

a ex pr. 21. hu. b prop. 24. lib. 1. c prop. 24. hu.

EVCL. 1. X. PROPOSIT. XXVII. *Si fuerint duæ lineæ inæquales, & ex maiore auferatur eius ſemiſſis, & à reſidua rurſus tollatur eius ſemiſſis, & hoc repetatur ſemper: relinquentur tandẽ aliqua linea, quæ minor erit propoſita minore linea.* Tabula III. Figura 11.

Sint duæ lineæ, AB maior, & C minor. Dico, ſi ex maiore, atque ex eius reſiduis ſemper medietates tollantur, relinqui tandem lineam mino-

minorem, quàm C. Multiplicetur C toties, quouſque efficiatur DH maior, quàm AB; & diſtribuatur D H in ſuas partes DE,EF,FG & GH æquales ipſi C. Poſtea ex a AB tollatur eius ſemiſſis AK, & à reliqua KB tollatur pariter eius ſemiſſis K M, & hoc ſemper repetatur, quouſque portiones AK, KM, MN & NB, in ipſa AB ſectæ, totidem ſint, quot ſunt partes alterius DH; quod fieri poſſe certum eſt, cùm continuum ſemper diuidi poſſit. Oſtendendum eſt poſtremam portionem NB minorem eſſe ipſa C. Quoniam ex minore AB tollitur eius dimidium AK, & ex maiori D H tollitur DE minus, quàm eius dimidium: erit reliqua KB minor, quàm reliqua EH. Et quia rurſus ex minore KB tollitur eius dimidiũ KM; at ex maiore EH tollitur EF non maior, quàm dimidium eius. Ergo reſidua MB minor erit, quàm reſidua FH. Tandem ex minore MB tollitur eius dimidium MN; at ex maiore FH tollitur FG non maior, quàm dimidium eius, & ſic ſemper. Ergo tandem poſtremum reſiduum NB minus erit, quàm GH, ſeu C, quod illi æquale eſt. Quare patet propoſitum.

a prop. 9. lib. 8

Corollarium Patet, quòd, ſi ex maiore AB tollatur AK magis, quàm eius

eius dimidium, & ex reſidua KB rurſus tollatur magis, quam eius dimidium, & hoc ſemper repetatur, tandem relinquetur aliqua linea, quæ minor erit quacunque propoſita linea C.

PROPOSITIO XXVIII. *In triangulo iſoſcele rectangulo differentia lateris & hipothenuſæ minor eſt medietate lateris; & differentia huius ſegmenti à lateris reſiduo minor eſt medietate præcedentis differentiæ; & ſic ſemper continuari poteſt talis differentiarum abſciſſio, quouſque poſtremum ſegmentum minus ſit quacunque data recta linea.* Tabula III. Fig. 12.

Sit triangulum iſoſcelium ABC, rectangulum in B, & quelibet recta linea D, cuiuſcunque paruitatis. Dico differentiam AC & BC minorem eſſe medietate ipſius AB. Diuidatur *a* bifariam angulus ACB à recta linea CF, quæ ſecet rectam AB in F; atque *b* à puncto F ducatur FE perpendicularis ad AC, ſecans eam in E; extendaturque *c* recta FG parallela ipſi AC, ſecans BC in G. Et quoniam propter *d* parallelas eſt angulus BGF æqualis angulo C; atque angulus BFG æqualis angulo A, ſuntque *e* anguli A & C æquales ad baſim iſoſcelij ABC. Ergo etiam anguli BFG & BGF

a prop. 8. lib. 1

b prop. 11. lib. 1.

c Corol. prop. 16 lib. 1.

d prop. 15. lib. 1

e prop. 6 lib. 1.

BGF æquales ſunt, ideoque *f* latera BG, BF æqualia ſunt, & triangulum BFG eſt iſoſceles. Poſtea quia in triangulis CEF & CBF, angulus BCF, æqualis eſt angulo ECF, & duo anguli recti B & E æquales ſunt, & latus CF eſt commune, oppoſitum angulis rectis B & E; Ergo *g* CB æqualis eſt CE, atque BF æqualis eſt EF. Cùmque in triangulis FBG & FEA ſint duo anguli B & E recti, & anguli BGF & A æquales, quibus opponuntur latera æqualia FB & FE. Igitur *h* AF æqualis eſt FG, atque AE æqualis ipſi GB, ſeu ei æquali FB. Eſtque in triangulo AEF latus AF (ſubtendens rectum, & *i* ideo maximum angulum AEF) maius, quàm AE. Igitur AF maius eſt, quàm FB. Quare minus ſegmentum BF æquale eſt ipſi EA, differentiæ lateris BC, & hypothenuſæ AC eiuſdem trianguli ABC.

f prop. 20. lib. 1.

g prop. 25. lib. 1.

h prop. 25. lib. 1.

i prop. 20. lib. 1.

Dico Secundò differentiam ſegmentorum AF, & FB minorem eſſe medietate ipſius FB. & ſic ſemper *l* ducta recta GK, ſecante angulum G bifariã, & ducta *m* KH perpendiculari ad FG, ſecante eam in H, erit vt prius minus ſegmentum KB æquale FH, differentiæ ipſarum BG & GF; eſtque BG æqualis BF & FG æqualis AF. Ergo KB, minus ſegmentum totius FB, æquale eſt differen-

l prop. 8 lib. 1.

m prop. 11. lib. 1

tiæ

tiæ præcedentium ſegmentorum A F & FB. Et quoniam continuum ſemper diuiſibile eſt, poterit denuò ſecari KB in O, vt BO ſit minus ſegmentum, & ſit æquale differentiæ ipſarum FK, KB & ſic ſemper. Cumque ſint duæ rectæ lineæ AB & D, & ex maiori AB auferatur maius ſegmentum, ideſt magis, quàm eius dimidium; & ex reſiduo FB auferatur FK magis, quàm eius dimidium; atque ex KB tollatur KO magis, quàm eius dimidium; & ſic ſemper. Ergo a poſtremum ſegmentum OB minus erit quacunque data recta linea D, & omnia minora ſegmenta ablata, ſunt differentiæ præcedentium ſegmentorum. Quod erat propoſitum.

a *Corol. 1. prop. 27. hu.*

EVCL. 116, X.

PROPOSITIO XXIX. *Nulla recta linea, quæ metitur latus quadrati, menſurare poteſt diametrum eius. Vocentur latus, & diameter quadrati, recta linea* incommenſurabiles *inter ſe*. Tab. III. Fig. 13.

Sit quadratum ABCD, cuius diameter DB, & recta linea R menſuret latus AB ipſius quadrati AC; ſitque R quælibet ex innumerabilibus rectis lineis, quæ metiri poſſunt ipſam AB. Dico rectam R nunquam menſurare diametrum BD. Si enim hoc verum non eſt, menſuret etiam recta R diametrum BD. Et quia

quia *a* in quadrato AC angulus A rectus eſt; & duo latera DA & AB ſunt æqualia, erit triangulum BAD iſoſcelium, rectangulum. Quare facta *b* BE æquali ipſi AB ſecari *c* poteſt latus AB in F, vt ſit minus ſegmentum AF æquale DE, differentiæ duarum AB & DB: pariterque, facta FG æquali AF, ſecari poteſt AF in H, vt ſit minus ſegmentum AH æquale GB, differentiæ ipſarum AF & FB; & facta HK æquali AH, denuo ſecari poteſt AH in O, vt ſit ſegmentum AO æquale KF, differentiæ ipſarum AH & HF, & hoc ſemper fieri poteſt, quouſque poſtremum ſegmentum, quod ſit AO minus ſit quacunque data recta R. Et quoniam ponitur recta R menſura ipſius AB, atque alterius DB; eſtque EB æqualis AB. Ergo recta R menſurat totam DB, & ablatam BE. Quare *d* recta R menſurabit quoque reſiduam differentiam DE: eſtque AF æqualis ipſi DE. Igitur R metitur ipſam AF; menſurabat autem prius totam AB. Ergo *e* eadem R menſurabit Reſiduam FB, atque ipſam AF; & ideo etiam earum differentiam GB, ſeu AH (huic æqualem) menſurabit; ſed etiam AF metiebatur eadem R. Igitur menſurabit quoque reſiduam HF; atque menſurabat pariter ipſam AH. Quare R metitur earum

a prop. 34. lib. 1.

b prop. 3. lib. 1.

c prop. 28. hu.

d ax. 6. lib. 1.

e Ax. 6 lib. 1.

dif-

differentiam KF; & ideo ei æqualem AO. Et propterea *f* recta R æqualis, aut minor erit, quàm AO (maior enim non poteſt menſurare minorem); quod eſt impoſſibile. Facta enim fuit recta AO minor, quàm R. Non ergo reperiri poteſt aliqua recta R, quantulacunque illa ſit, quæ metiatur diametrum BD, & latus AB, eiuſdem quadrati AC, quod, &c. vocentur rectæ lineæ A B & DB inter ſe Incommenſurabiles.

f Def. 13. lib. 1

PROPOSITIO XXX. *Si fuerint duæ rectæ lineæ incommenſurabiles; erunt ſpatia parallelogramma, vel triangula ſuper ipſas deſcripta, æquè alta inter ſe, incommenſurabilia.* Tabula III. Fig. 14. 15.

Sint duæ rectæ lineæ AB & BC incommenſurabiles, quæ ſint baſes, eiuſdem altitudinis parallelogrammorum R & S, vel triangulorum. Dico parallelogramma, vel triangula R & S inter ſe eſſe incommenſurabilia. Si enim hoc verum non eſt, habeant ſpatia R & S aliquam communem menſuram, ſi fieri poteſt, quæ ponatur eſſe X, & quoties X metitur ſpatium R, in *a* tot partes inter ſe æquales AG, GH, HK, K B diſtribuatur recta linea AB: & quoties X metitur ſpatium S, in tot partes æquales BM, MO, OC diſtribua-

a prop. 28. lib. 1

bua-

buatur recta BC, & à punctis G, H, K, M, O *b* ducantur parallelæ, efficientes parallelogramma in primo caſu, aut conuenientes in eodem puncto D, efficientes triangula, vt in ſecundo caſu: erunt *c* parallelogramma AGD, GHD, HKD, KB D inter ſe, aut triangula *d* æqualia; eo quod baſes eorum ſunt æquales, & inter eaſdem parallelas exiſtunt. Et ſimiliter erunt parallelogramma COD, OMD, MBD inter ſe, aut triangula æqualia inter ſe. Et quoniam X toties menſurat ſpatium R, quoties KB menſurat baſim BA; & quoties KB menſurat baſim BA, toties ſpatium KBD menſurat ſpatium R (comparando ſemper parallelogramma inter ſe, aut triangula inter ſe.) Ergo X & ſpatium KBD æquè metiuntur ſpatium R; ideoq; ſpatium X & KBD æqualia inter ſe ſunt, cùm ſint æqualia cuilibet parti earum, in quæ reſoluitur ſpatium R. Eadem ratione ſpatium M B D æquale erit ſpatio X. Quare duo ſpatia KBD & MBD æqualia erunt inter ſe, cum ſint æqualia ipſi X; & ſunt eiuſdem altitudinis. Ergo eorum baſes KB & BM æquales ſunt inter ſe (nam ſi inæquales eſſent, pariter *e* parallelogramma, vel *f* triangula KBD & MBD inæqualia eſſent, quod eſt conrra hypotheſin;) ſed KB metitur AB & BM menſurat ipſam

b ex pr. 16. lib. 1.
c pr. 31. lib. 1.
d prop. 32. lib. 1.
e ex pr. 31. lib. 1
f ex pr. 32. lib. 1.

ipſam BC. Ergo duæ rectæ AB & BC inter ſe commenſurabiles ſunt; cùm ab æqualibus KB & BM, ſeù eadem KB menſurentur, quod eſt contra hypotheſin. Poſitæ enim fuerunt AB & BC incommenſurabiles. Non ergo ſpatia R & S habere poſſunt aliquam communem menſuram; ideoque incommenſurabilia ſunt. Quod erat propoſitum.

SCHOLIVM.

Sicuti oſtenſum eſt lineas rectas & ſpatia, triangula, vel parallelogramma eſſe poſſe incommenſurabilia, ita oſtendemus poſtea omnes quantitates continuas, eiuſdem generis, incommenſurabiles inter ſe eſſe poſſe. Debent tamen ex hac ſerie excludi Numeri; eo quod in numeris diuidendo poteſt deueniri ad minimum in eius genere, ſcilicet ad vnitatem; hoc autem in quantitate continua minimè locum habet, quia ſemper diuiſibilis eſt; & ſic non datur minimum in eius genere, quod poſſit eſſe menſura communis duarum quantitatum continuarum.

Finis Libri ſecundi.

LIBER III.

De comparationibus quātitatum.

DEFINITIONES. EVCL. lib. V.

PARS dicitur minor quantitas maioris quantitatis, cùm minor aliquoties metitur maiorem. I.

MVLTIPLEX autem dicitur maior quantitas minoris quantitatis, cùm maior à minore menſuratur. II.

PARTES dicitur quantitas maior, ſiue minor, alterius quantitatis, cùm reperiri poteſt tertia quantitas, quæ illarum ſit communis menſura. Tabula III. Fig. 16. 17. 18. III.

Duarum quantitatum eiuſdem generis, ſi prima A metitur ſecundam B, vocabo primam A partem ſecundæ B denominatam à numero partium contentarum in B, veluti vna tertia, vna quarta pars, &c. & ſi prima A menſuratur à ſecunda B vocabo A multiplicem ipſius, vt duplā triplam &c. At ſi prima & ſecunda B menſurentur ab aliquibus C & C. Vocabo A partes ipſius B quarum numerus indicatur à prima A, nomen à ſecunda B, vt tres quartæ, quatuor quintæ ipſius B &c.

EADEM pars dicitur prima quantitas ſecundæ, ac eſt tertia quarta quantitatis; cùm prima toties ſecundam metitur, quoties tertia quartam. IV.

V. *ET æquè multiplex dicitur prima quãtitas ſecundæ, vt eſt tertia quartæ; cùm prima, & tertia æquè menſurantur à ſecunda, & quarta.*

VI. *EAEDEM partes dicitur prima quantitas ſecundæ, quemadmodum eſt tertia partes quartæ quantitatis, cùm duæ quælibet quantitates æquè metiuntur primam, & tertiam; pariterque æquè menſurent ſecundam, & quartam.* Tab. III. Fig. 19. 20. 21

Quatuor quantitatũ (ſiue duæ primæ fuerint eiuſdem generis cum ſecundis ſiue non) ſi prima A toties metitur ſecundam B, quoties tertia C menſurat quartam D. Dicam primam ipſius ſecundæ, pariterque tertia quartæ eandem partem eſſe. Et ſi A toties menſuretur à B, quoties C menſuratur à D, vocabo antecedentes A & C æquemultiplices conſequentium B & D. Verum ſi A & C æquè menſurantur à duabus G & H, quæ pariter æquè metiantur conſequentes B & D. Dicam A ipſius B, atque C alterius D eaſdem partes eſſe.

VII. *SI antecedens quantitas fuerit multiplex, aut pars, parteſue conſequentis, vocetur* Comparatio *primæ cum ſecunda Proportio commenſurabilis; diceturque prima ad ſecundam, proportionem menſurabilem habere. At ſi nulla alia quantitas reperiri poteſt quæ ſit ambarum communis menſura;*

di-

dicetur antecedens ad conſequentem habere proportionem incommenſurabilem.

SI quatuor quantitatum (eiuſdem generis, ſiue non) prima ipſius ſecundæ, & tertia quartæ æquè multiplices fuerint, vel eadem pars, aut eædem partes: vocetur commenſurabilis proportio *quantitatis primæ ad ſecundam eadem, vel ſimilis proportioni quantitatis tertiæ ad quartam; & huiuſmodi quatuor quãtitates, vocentur* Proportionales commenſurabiles. Tab. III. F. 22. VIII.

SI verò quantitas prima maior fuerit quam vt eædem partes ſit ſecunda ac eſt tertia quantitas ipſius quartæ, vocetur Proportio quantitatis *primæ ad ſecundam maior commenſurabili proportione quantitatis tertiæ ad quartam. Et ſi prima minor fuerit quantitate illa, quæ ipſius ſecundæ eadem partes eſt, quam tertia ipſius quartæ: vocetur* Proportio quantitatis *primæ ad ſecundam minor proportione commenſurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem.* Tab. III. Fig. 23. IX.

Si fuerint quatuor quantitates A B, C, D: & C ſit quælibet partes, ipſius D. v. g. C ſit tres partes quartæ ipſius D; at A ſit maior, quam tres quartæ ipſius B; ita vt alia E minor quam A ſit præciſè, vt C ad D. Tunc voco proportionem A ad

B maiorem proportione commenſurabili quam habet C ad D.

Et ſi A minor ſit quàm opus eſt, vt ad B eandem commenſurabilem rationem habeat, quam C ad D. Tunc proportio A ad B minor erit commenſurabili ratione quam habet C ad D.

X. *ET voco vnam proportionem maiorem alia incommenſurabili proportione; quando prima proportio eſt maior, at ſecunda eſt minor aliqua commenſurabili ratione.*

XI. *ET è contra (iiſdem poſitis) ſecunda proportio incommenſurabilis erit minor prima.* Tab III. Fig. 24. 25.

Sit C incommenſurabilis ipſi D; ſi verum eſt quod ex infinitis proportionibus commenſurabilibus aliqua reperiri poteſt qualis eſt E ad F reſpectu cuius proportio A ad B ſit maior, & proportio C ad D ſit minor eadem ratione E ad F; vt ſi v. g. E ſit quatuor tertiæ partes ipſius F, & verum eſt quod A maior eſt 4 tertijs ipſius B, ſed C eſt minor 4 tertijs alterius D. Tunc voco proportionem A ad B maiorem incommenſurabili proportione, quam habet C ad D, Et ſi concedatur, quod proportio A ad B maior ſit proportione incommenſurabili C ad D, ex vi definitionis neceſſariò proportio aliqua commenſurabilis reperietur, vt E ad F ſcilicet 7. ad 9. v. g. reſpe-

ſpectu cuius proportio A ad B ſit maior & C ad D minor; ideoque A erit maior quam 7 nonæ partes ipſius B & C minor erit quam 7 nonæ partes alterius D.

Hinc ſequitur dari poſſe quantitatem minorem ipſa prima A qualis eſt v. g. G quæ erit 7 nonæ partes ipſius B; pariterq; dabitur aliqua quãtitas non minor quam C quæ 7 partes nonæ ſit alterius D qualis eſt H.

Idemque dici poteſt de minori proportione incommenſurabili.

AT in eiſdem incommenſurabilibus quatuor quantitatibus ſi proportio quantitatis primæ ad ſecundam non fuerit maior, neque minor ea proportione incommenſurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem: vocetur incommenſurabilis proportio *quantitatis primæ ad ſecundam eadem, vel ſimilis proportioni, quam tertia habet ad quartam quantitatem. Et huiuſmodi quatuor quantitates vocentur* proportionales incommenſurabiles. Tab. III. Figura 26. *XII.*

Poſitis eiſdem quantitatibus A, B, C, D, & ſint A ipſi B, nec non C ipſi D incommenſurabiles. Si proportio ipſius A ad B non eſt maior, neque minor ea proportione incommenſurabili, quam C habet ad D: ideſt ſi fuerit impoſſibile dari rationem aliquam commenſurabilem in-

ter infinitas, quæ aſſignari poſſunt qualis eſt E ad F, vt proportio A ad B maior ſit, at proportio C ad D ſit minor eadem commenſurabili ratione E ad F. Pariterque proportio A ad B minor non ſit, & C ad D maior aliqua commenſurabili proportione E ad F. Vocabitur proportio incommenſurabilis primæ A ad ſecundam B, eadem, vel ſimilis proportioni quantitatis tertiæ C ad quartam D. Et huiuſmodi quàtuor quantitates A, B, C, D dicentur proportionales incommenſurabiles.

AXIOMATA.

I. *Si prima quantitas ſecundam metiatur, ſecunda verò tertiam menſuret; prima quoq; tertiam metietur.* T. III. F. 27.

Vt ſi quantitas A menſuret ſecundam BC & BC menſuret tertiam DE. Manifeſtum eſt primam A menſurare quoque tertiam DE. Nam diuiſa DE in partes DF, FG, GE, quæ ſingulæ æquales ſint ipſi BC; cùm A menſuret ipſam BC, menſurabit quoque eadem A ſingulas partes DF, FG, GE; ideoque a ipſa A totam DE ex dictis partibus conſtantem menſurabit.

a *Axi. 6. lib. 1.*

II. *TRIBVS quantitatibus propoſitis, quam proportionem habet prima ad ſecundam, habebit tertia ad aliquam aliam quantitatem eiuſdem generis.*

III. *ET quam proportionem habet prima ad*

ad ſecundam, habebit aliqua alia quantitas eiuſdem generis ad tertiam. Tabula III, Fig. 28.

Vt, ſi data ſit aliqua proportio quantitatis A ad B. Manifeſtum eſt tertiam quantitatem C habere ad aliquam aliam quantitatem eiuſdem generis D eandem proportionem, quam A habet ad B. Licet enim ignoretur interdum quænam ſit illa quantitas quarta, certum eſt eam reperiri in natura. Nam cuiuſlibet datæ quantitatis C datur quoque quælibet multiplex aut partes eius. At ſi proportio A ad B eſt incommenſurabilis, vt eſt illa quam habet latus ad diametrum quadrati, ſuppoſito quod C ſit latus alicuius quadrati dari poterit diameter eiuſdem, quæ ſit D.

SI duarum quantitatum æqualium vna partes fuerit alicuius tertiæ: & altera quoq; eadem partes erit eiuſdem tertiæ, ac erat prima. T. III. F. 29. *IV.*

DVAE proportiones in tribus pauciſſimis terminis contineri, aut continuari poſſunt: ſi nimirum vnus ſit conſequens, aut antecedens communis; vel ſi vnus ſit antecedens vnius proportionis, & conſequens alterius. Tab. III. Fig. 30. *V.*

SI quatuor quantitatum prima maior fuerit, quàm ſecunda, ſed tertia non ſit maior, quàm quarta: habebit prima ad ſecundam maiorem pro- *VI.*

portionem, quàm tertia habet ad quartam. Tab. III. Fig. 31.

Nam, exiſtente A maiore, quàm B; C verò non maiore ipſa D, proportio a quantitatis primæ ad ſecundam maior erit commenſurabili proportione æqualitatis; cùm prima A maior ſit ſecunda B: at proportio tertiæ C ad quartam D non erit maior eadem commenſurabili proportione æqualitatis; cùm tertia ponatur non maior quarta. Vnde patet (ex definitione decima) A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D.

a def. 9. huius.

PROPOSITIO I. *Si duæ quantitates duarum quantitatum fuerint æquè multiplices, erunt viciſſim vnà æquales, aut vnà maiores, aut minores.* Tabula III. Figura 32.

Sint quatuor quantitates, ſiue magnitudines, ſiue numeri AB, E, CD & F, omnes eiuſdem generis, & ſit AB tam multiplex ipſius E, quam CD eſt multiplex alterius F; ſitque primò E æqualis F. Dico AB ipſi CD æqualem eſſe. Intelligantur AB & CD diuiſæ in ſuas partes. Manifeſtum a eſt tot partes AG, GH & HB contineri in AB, ſingulæ æquales ipſi E, quot partes CI, IK & KD continentur in CD, ſingulæ æquales eidem F. Ergo AG & CI cum ſint æquales æqualibus

a Def. 5 huius.

E &

E & F, inter ſe quoque æquales erunt, pariterque GH, IK, nec non HB & KD æquales erunt inter ſe. Iam ſi æqualibus AG, CI addantur æquales GH, IK: erunt b totæ AH & CK æquales inter ſe; Et ſi eiſdem rurſus æquales HB & KD addantur, erunt totæ AB & CD æquales inter ſe. Quare quando E æqualis eſt F: etiam AB æqualis eſt ipſi CD.

b *Axi. 2. lib. 1.*

Sit ſecundò E maior, quam F. Dico AB maiorem eſſe, quam CD. Diuiſis æquè multiplicibus, vt prius: erit AG maior, quam CI, eo quod illa maiori E, hæc verò minori F æqualis eſt. Pari ratione GH maior erit, quam IK & HB maior, quàm KD. Iam, ſi maiori AG maior GH addatur, & minori CI minor IK coniungatur, & rurſus eiſdem eodem ordine aliæ partes inæquales ſuperaddantur, erit tota AB maior, quàm CD.

Tertio ſit E minor, quàm F. Dico AB minorem eſſe, quàm CD. Quia E minor eſt, quàm F. Ergo F maior erit, quàm E; ideoque c CD etiam maior erit quàm AB.

c *ex prima parte.*

Quartò ſit AB æqualis CD. Dico E æqualem eſſe ipſi F. Si hoc verum non eſt: erit E maior, aut minor, quàm F. Ergo, ex ſecunda, & tertia parte huius, AB maior, aut minor erit, quàm CD, quod eſt

E 5 con-

contra hypotheſin. Ergo E ipſi F æqualis eſt.

Quintò ſit AB maior, quàm CD. Dico E maiorem eſſe, quàm F. Sin minus, erit E æqualis, aut minor, quàm F. Vnde, ex prima, & tertia parte huius, AB æqualis erit, aut minor quàm CD, quod eſt contra hypotheſin. Quare E maior eſt, quàm F. Vnde patet propoſitum.

Corollarium Patet, quòd ſi duæ quantitates fuerint duarum quantitatum eædem partes, erunt viciſſim vnà maiores, aut vnà minores, vel vnà æquales. Tab. III. Fig. 33.

Nam, ſi ponantur M & N æquè multiplices earundem E & F: erunt *d* AB ipſius M, atque CD ipſius N eædem partes; & ſicuti *e* E maior, vel minor, aut æqualis eſt ipſi F; ſic pariter M maior, vel minor, aut æqualis erit ipſi N; nec non AB eodem modo maior, vel minor, aut æqualis erit ipſi CD.

d *Def. 6 huius.*
e *prop. 1 huius.*

EVCL. 8. V.

PROPOSITIO II. *Inæqualium quantitatum maior ad eandem maiorem proportionem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem maiorem proportionem habebit, quàm ad maiorem inæqualium.* Tabula III. Fig. 34. 35.

Sint duæ quantitates AB maior, C minor, & quælibet tertia D eiuſdem

dem generis. Dico primò AB ad D maiorem rationem habere quàm C ad eandem D. Ex maiore AB intelligatur ablata FB æqualis ipſi C, reſidua erit AF: *a* Intelligaturque ſecta D bifariam, & bifariam ſucceſſiuè, quouſque reperiatur eius pars G, quæ minor ſit, quàm AF (quod fieri poſſe conſtat licet in numeris multoties fracti adhiberi debeant): poſtea ſumatur G ſemel, aut bis, vel ter, & ſic vlterius, quouſque conſurgat N, ex G compoſita, quæ proximè maior ſit quàm FB, ſcilicet exceſſus ipſius N ſupra FB non ſit maior, quàm vna eius particula G: cùmque G minor ſit, quàm AF: erit exceſſus ipſius N ſupra FB minor, quàm AF; & ideo N minor erit, quàm AB, ſed maior, quàm FB, ſeu maior, quàm C (cùm C & FB æquales ſint). Vnde erunt quatuor quantitates AB prima, D ſecunda, C tertia, & D quarta (concipitur enim D, vt ſecunda, & vt quarta). Eſtque *b* proportio quantitatis primæ AB ad ſecundam D maior illa commenſurabili proportione, quam habet N ad eandem D (eo quod AB maior eſt, quàm N); atque *c* proportio quantitatis tertiæ C ad quartam D minor eſt eadem commenſurabili proportione, quam habet N ad D (cùm C ſit minor, quàm N). Ergo *d*

a ex propoſ. 27. lib. 2.

b Def. 9 huius.

c Def. 9 huius.

d Def. 10. huius.

quantitas AB ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D.

Secundò dico eandem D ad minorem C habere maiorem proportionem, quàm ad AB. Vt prius, fiat N partes ipſius D, ita vt ſit minor quàm AB, ſed maior, quàm C; & intelligantur O quidem ipſius AB, atque H ipſius C eædem partes, quæ D partes eſt ipſius N. Et *e* quia N minor eſt, quàm AB, erit D minor, quàm O: pariterque quia N maior eſt, quàm C, erit D maior, quàm H. Quapropter erunt quatuor quantitates, prima D, ſecunda C, tertia D (concipitur enim D, vt prima, & vt tertia), & quarta AB; *f* eſtque proportio primæ D ad ſecundam C maior commenſurabili illa proportione, quam habet H ad C ſiue O ad AB (eo quod H minor, quàm D *g* eſt ad C, vt O ad AB); atque proportio tertiæ D ad quartam AB minor eſt eadem commenſurabili proportione, *h* quam habet O ad AB (eo quod D minor eſt, quam O). Ergo *i* D ad C maiorem rationem habet, quàm D ad AB. Quod erat, &c.

e Corol. prop. 1. huius.

f Def. 9 huius.

g Def. 8 huius.

h Def. 9 huius.

i Def. 10. hu.

EVCL. 7. V. PROPOSITIO III. *Aequales quãtitates ad eandem habent eandem proportionem; & eadem ad aquales.* Tabula III. Fig. 36.

Sint quantitates eiuſdem generis A, B

A, B & C; & A ſit æqualis B. Dico A ad C eſſe, vt B ad C. ſi enim hoc verum non eſt, aliqua *a* quantitas reperietur in natura maior, vel minor quàm A, quæ ad C habeat eandem rationem, quam B habet ad eandem C. Intelligatur illa eſſe, ſeu vocari D. Et quia D & A inæquales ponuntur, eſtque B æqualis A; Ergo D maior, aut minor eſt, quàm B; & ideo *b* D maiorem, aut minorem proportionem habebit ad C, quàm B habet ad eandem C, quod eſt impoſſibile: Poſita enim fuit D ad C, vt B ad eandem C. Non ergo alia quantitas maior, aut minor, quàm A, erit ad C, vt B ad C; ideoque ipſamet A ad C erit, vt B ad C.

a Axi. 3. huius

b prop. 2. huius

Secundò dico C ad A, atque ad B eandem proportionem habere. Si enim hoc verum non eſt, quam *c* rationem habet C ad B habebit C ad aliquam aliam quantitatem D. Et quia D & A inæquales conceduntur, & eſt B æqualis A: Ergo D maior, aut minor eſt, quam B; & ideò *d* C ad B maiorem, aut minorem rationem habebit, quàm C habeat ad D, quod eſt impoſſibile. Poſita enim fuit C ad B, atque ad D in eadem ratione. Non ergo C ad maiorem, vel minorem, quàm A, eandem rationem habet, quàm C ad B; ideoque C ad ipſam A eandem pro-

c Axi. 2. huius

d prop. 2. huius

proportionem habet, quam ad B. Quare patet propoſitum.

EVCL. 9. V. PROPOSITIO IV: *Quæ ad eandem quantitatem eandem proportionem habent, æquales ſunt inter ſe. Et ad quas eadem quantitas eandem proportionem habet, eæ quoque inter ſe ſunt æquales.* Tabula III. Fig. 37.

Sint tres quantitates A, B & C; & primò A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad eandem C. Dico A ipſi B æqualem eſſe. Si enim A non eſt æqualis ipſi B, erit aut maior, aut minor eadem. Ergo *a* A ad C maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm B ad eandem C; quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A maior eſt, aut minor, quàm B. vnde æqualis erit ipſi.

a prop. 2. huius

Habeat ſecundò eadem C ad A eandem proportionem, quàm ad B. Dico pariter A æqualem eſſe ipſi B. Si enim A non eſt æqualis B: erit aut maior aut minor eadem. Quare eadē *b* C ad A minorem, aut maiorem proportionem habebit, quàm ad B, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A maior, aut minor eſt, quàm B. Quare neceſſariò æqualis erit illi. Quod erat oſtendendum.

b prop. 2. huius

PRO-

PROPOSITIO V. *Ad eandem quantitatem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt. Et ad quam eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt.* Tabula III. Fig. 38. EVCL. 10. V

Habeat primò A ad C maiorem rationem, quàm B ad eandem C. Dico A maiorem eſſe ipſa B. Nam, ſi hoc verum non eſt, erit A, aut æqualis, aut minor, quàm B; & ideò A *a* eandem, aut *b* minorem rationem habebit ad C, quàm habeat B ad eandem C. quæ ſunt falſa, & contra hypotheſin. Non ergo A æqualis, aut minor eſt, quam B. Quare neceſſe eſt A ipſa B maiorem eſſe:

a *prop. 3. huius* b *prop. 2. huius*

Secundo eadem C habeat ad B maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B ipſa A minorem eſſe. Nam ſi hoc verum non eſt, erit B, aut æqualis, aut maior, quàm A; & ideò C ad B *c* eandem, aut *d* minorem proportionem habebit, quam ad A, quæ ſunt contra hypotheſin. Non ergo B æqualis, aut maior eſt ipſa A. Quare minor erit illa. Quæ erant oſtendenda.

c *Prop. 3. huius* d *prop. 2. huius*

PROPOSITIO VI. *Si duæ proportiones ſimiles fuerint inter ſe, & vna illarum maior, aut minor fuerit aliqua tertia proportione: erit quoque reliqua maior aut minor eadẽ.* T. III. Fig. 39. EVCL. 13. V.

PRO-

Sit A ad B, vt C ad D, & quælibet alia proportio F ad K: Et primò A ad B habeat maiorem rationem, quàm F ad K. Dico C ad D maiorem proportionem quoque habere, quàm F ad K. Quoniam A ad B maiorem rationem habet, quàm F ad K. Ergo *a* proportio A ad B maior erit aliqua commenſurabili proportione, quæ ponatur eſſe O ad K; At proportio F ad K erit non maior eadem commenſurabili ratione, eiuſdem O ad K. Dico iam quod proportio C ad D maior eſt commenſurabili proportione O ad K. Nam, ſi fieri poteſt, ſit proportio C ad D non maior eadem ratione commenſurabili O ad K; cùmque proportio A ad B maior ſit eadem commenſurabili proportione O ad K. Igitur *b* A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo proportio C ad D eſſe poteſt non maior ratione commenſurabili O ad K; ideoque maior erit illa; eſtque proportio F ad K non maior eadem commenſurabili ratione O ad K. Igitur *c* C ad D maiorem proportionem habebit, quàm F ad K.

a Def. 10. hu. *b Def. 10. hu.* *c Def. 10. hu.*

Secundò quando A ad B minorem rationem habet, quàm F ad K: pari modo oſtendetur, quòd proportio C ad D minor eſt commenſurabili ratione O ad K, dum pro-

por-

portio F ad K non minor eſt eadem ratione commenſurabili O ad K. Vnde C ad D minorem rationem habebit, quam F habet ad K. Quæ erant oſtendenda.

PROPOSITIO VII. *Proportiones, quæ ſunt eadem vni tertiæ, ſunt eadem quoque inter ſe.* Tabula III. Fig. 40. EVCL. 11. V.

Sit proportio quantitatis A ad B eadem, quæ C ad D; & pariter E ad F ſit, vt C ad D. Dico eſſe A ad B, vt E ad F. Si hoc verum non eſt, habeat, ſi fieri poteſt, A ad B maiorem proportionem, aut minorem, quàm E habet ad F. Et quia proportio E ad F eadem ſuppoſita eſt, quæ C ad D; & proportio E ad F maior, aut minor conceſſa eſt proportione magnitudinis A ad B. Ergo a C ad D maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm A ad B, quod eſt contra hypotheſin. Erat enim C ad D, vt A ad B. Non ergo A ad B maiorem, aut minorem proportionem habere poteſt, quàm E ad F; & ideo A ad B erit, vt E ad F. Quod erat oſtendendum.

a prop. 6. huius

PROPOSITIO VIII. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales, & quinta ſit maior, quàm prima, & ſexta non maior quàm tertia: erit*

quin-

quinta ad ſecundam in maiori proportione, quàm ſexta ad quartam: Et quinta ad ſextam in maiori proportione, quàm prima ad tertiam. Et ſi, quinta maior ſit ſecunda, & ſexta non maior quarta, erit prima ad quintam in minori proportione, quàm tertia ad ſextam. Tabula III. Figura 41, & Tab.IV. Fig.1.

Sit A ad B in eadem ratione, quam C habet ad D & E ſit maior, quàm A, & H non ſit maior, quàm C ideſt ſit H æqualis, aut minor ipſa C. Dico primò E ad B maiorem proportionem habere, quàm H ad D. Quia *a* maior E ad B maiorem rationem habet, quàm minor A ad eandem B; eſtque C ad D, vt A ad B: Ergo *b* E ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D; ſed C æqualis, aut maior eſt, quàm H. Igitur C ad *c* eandem D eandem, aut *d* maiorem rationem habet, quàm H ad D. Quare *e* proportio E ad B adhuc maior erit proportione H ad D.

a prop. 2 huius. b prop. 6. huius. c prop. 3. huius. d prop. 2 huius. e Prop. 6. huius.

Secundò dico E ad H maiorem proportionem habere, quam A ad C. Quoniam E maior eſt, quàm A. Ergo *f* E ad H maiorem rationem habebit, quàm A ad eandem H; eſtque H æqualis, aut minor ipſa C. Igitur eadem A ad H *g* eandem, *h* aut maiorem rationem habet, quàm ad C. Et propterea *i* E ad H adhuc ma-

f prop. 2 huius. g prop. 3. huius. h prop. 2 huius. i prop 6 huius.

maiorem proportionem habebit, quàm A habet ad C.

Tertiò ſit E maior ſecunda B proportionalium, & H non ſit maior quam D. Dico A ad E minorem proportionem habere, quàm C ad H. Quoniam E maior eſt, quàm B, at H non eſt maior, quàm D. Ergo *l* eadem A ad maiorem E habebit minorem proportionem, quàm ad B minorem; eſtque C ad D, vt A ad B. Igitur *m* A ad E minorem proportionem habet quam C ad D. Sed eadem C ad non maiorem H *n* eandem, aut *o* maiorem proportionem habet, quàm ad D. Igitur *p* proportio A ad E adhuc minor erit proportione C ad H. Vt propoſitum fuerat.

l prop. 2 huius. *m prop. 6. huius* *n prop. 3 huius.* *o prop. 2 huius.* *p prop. 6. huius*

PROPOSITIO IX. *Si prima quantitas ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, erit ſecunda ad primam, vt quarta ad tertiam. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma* Inuerſio rationis. Tabula IV. Fig. 2.

EVCL. *Coroll. prop. 4. lib. V.*

Sit A ad B, vt C ad D. Dico B ad A eandem rationem habere, quam D ad C. Si enim hoc verum non eſt, habebit B ad A maiorem, aut minorem proportionem, quàm D habet ad C; & ſi fieri poteſt, primò ſit proportio maior. Ergo *a* proportio B ad A maior erit; pro-

a Def. 10.

por-

portio verò D ad C non erit maior eadem proportione commenſurabili (quæ ponatur eſſe quantitatis E ad A, atque H ad C) ; & propterea B maior erit, quàm E, ſed D non erit maior, quàm H. Et quoniam E ad A, atque H ad C in eadem ſunt proportione commenſurabili. *b* Igitur E ipſius A, atque H alterius C eædem partes erunt; & è contra *c* A ipſius E, nec non C alterius H eædem partes erunt: & ideo *d* A ad E, atque C ad H in eadem proportione erunt; eſtque B maior, quam E, atque D non maior quam H. Igitur *e* A ad B proportionem minorem habet, quàm C habeat ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter B ad A non habet maiorem proportionem, quàm D ad C. Similiter oſtendetur, quòd D ad C non habet maiorem proportionem, quàm B ad A; & ideo B ad A neque minorem proportionem habebit, quàm D ad C. Et propterea *f* B ad A erit, vt D ad C. Quod erat oſtendendum.

b Def. 8

c Def. 6 huius.

d Def. 8 huius

e prop. 8 huius.

f Def. 12. hu.

Corollarium. Ex hac demonſtratione colligitur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam; inuertendo ſecunda ad primam minorem rationem habebit, quàm quarta ad tertiam. Ex eo enim, quod

Pappi Alex. prop. 7. lib. VII

quod proportio B ad A poſita fuit maior, quàm D ad C, demonſtrata fuit proportio A ad B minor proportione ipſius C ad D.

PROPOSITIO X. *Si quatuor quantitatum eiuſdem generis duæ antecedentes duarum conſequentium aquè multiplices fuerint; & antecedens antecedentis tantùm, vel conſequens conſequentis tantùm multiplex fuerit: erunt viciſſim proportionales.* Tabula IV. Fig. 3.

Sint quatuor quantitates eiuſdem generis, AB quidem ipſius E, & CD ipſius F æquè multiplices. Et primò ſit E ipſius F multiplex. Dico AB ad CD eſſe, vt E ad F. Quoniam AB & CD ipſarum E & F æquè multiplices ſunt, ſectis antecedentibus in ſuas partes, erunt *a* in AB tot partes AG, GH & HB, ſingulæ æquales ipſi E, quot ſunt in CD partes CI, IK & KD, ſingulæ æquales ipſi F, ideoque, *b* quæ pars eſt F ipſius E eadem pars erunt CI ipſius GA & IK ipſius GH & KD ipſius HB. Ergo *c* quoties F multiplicata æqualis fit ipſi E, toties CI multiplicata æqualis fit ipſi AG, & toties IK multiplicata efficitur æqualis ipſi GH, nec non KD toties multiplicata efficitur æqualis ipſi HB, & ſic reliqua ſegmenta ſi plura extiterint, quæ totidem ſunt in C D,

a Def. 5 huius

b prop. 3 huius

c Def. 4 huius

D, quot in AB. Ergo quoties F multiplicata æqualis fit ipſi E, toties ipſæ CI, IK, KD, ideſt ipſa C D multiplicata efficitur æqualis ipſis AG, GH, HB, ſeu ipſi AB. Et propterea CD toties menſurat ipſam AB, quoties F metitur ipſam E. & ideo *d* AB ipſius CD tam multiplex eſt, quàm E ipſius F. Vt erat probandum.

d *Def. 5. huius*

Secundò ijſdem poſitis ſit AB multiplex ipſius CD. Dico eſſe E ad F, vt AB ad CD. Fiat M ipſius F tam multiplex, quàm AB ipſius CD, eſtque pars CD multiplex ipſius F. Ergo *e* AB ad M eſt, vt C D ad F, erat autem, vt CD ad F, ita AB ad E. Ergo *f* eadem AB ad duas M & E eandem rationem habet; ideoque *g* E & M inter ſe æquales ſunt. Vnde *h* AB ipſius C D & E ipſius F æquè multiplices erunt. Quare &c.

e *ex prima parte.*
f *prop. 7 huius.*
g *prop. 4. huius*
h *prop. 3. huius*

EVCL. 15. V.

PROPOSITIO XI. *Eiuſdem generis partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione.* Tabula IV. Fig. 4.

Sint A ipſius B & C alterius D æquè multiplices, & eiuſdem generis. Dico A ad C eſſe, vt B ad D. Si enim hoc vèrum non eſt, habeat primò, ſi fieri poteſt, A ad C maiorem proportionem, quàm B ad D. Ergo *a* proportio A ad C maior

a *Def. 10. hu.*

ior

ior erit; proportio verò B ad D non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam intelligatur habere E ad C, atque H ad D; & ipſarum communes menſuræ eædem ſint R & S) Quare A maior erit quàm E, at B non erit maior, quàm H. Et quoniam ſunt C, D æquales, vel æquè multiplices ipſarum R & S cum hæ æquè metiantur illas, & eſt C ipſius D multiplex. Ergo *b* R ipſius S & C ipſius D æquè multiplices ſunt. Rurſus quia E & H æquales, vel æquè multiplices ſunt ipſarum R &; S & R eſt multiplex ipſius S. Ergo *c* E ipſius H tam multiplex eſt, quam R ipſius S, ſeu *d* quàm C ipſius D: eſt verò A ipſius B tam multiplex, quàm C ipſius D: Ergo *e* E ipſius H tam multiplex eſt, quàm A eſt multiplex ipſius B; ideoque *f* ſicuti E minor eſt, quàm A, ita H minor erit, quàm B; ſed conceſſa fuit H non minor, quàm B, quod eſt abſurdum, Non ergo A ad C maiorem proportionem habet, quàm B ad D. Eadem ratione oſtendetur A ad C non habere minorem proportionem, quàm B ad D. Quare *g* A ad C erit, vt vt B ad D. Quod erat probandum.

b prop. 10. hu.

c prop. 10. hu.

d prop. 7. huius

e prop. 7. huius

f prop. 8 huius.

g Def. 12. hu.

PROPOSITIO XII. *Si quatuor quantitates eiuſdem generis proportionales fuerint, & viciſſim proportio.*

EVCL. 16 V.

tionales erunt. Vocetur autem talis argumentandi forma Permutatio rationis. Tabula IV. Fig. 5.

Sit A ad B, vt C ad D; ſintque omnes eiuſdem generis. Dico eſſe A ad C, vt B ad D. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad C maiorem, aut minorem proportionem, quàm B ad D. Et primò ſit proportio maior, ſi fieri poteſt. Ergo *a* proportio A ad C maior erit, proportio verò B ad D non erit maior, eadem proportione commenſurabili (quam intelligatur habere E ad C, atque H ad D, & ipſarum communes menſuræ eædem ſint K & N:) quare A maior erit, quàm E, ſed B non erit maior, quàm H; cùmque ſit E ad C, vt H ad D. *b* Igitur maior erit proportio A ad B, quàm E ad H, ſed *c* K ad N eſt, vt E ad H (cùm ille ſint harum eædem menſuræ) Ergo *d* A ad B maiorem proportionem habet, quàm K ad N; eſt verò *e* C ad D, vt K ad N (cùm hæ ſint illarum eædem menſuræ.) Igitut A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter A ad C non habebit maiorem proportionem, quàm B ad D.

a Def. 10. hu. *b prop. 8. huius* *c prop. 11. hu.* *d prop. 6. huius* *e prop. 11. hu.* *f prop. 6. huius*

Similiter oſtendetur, quòd B ad D non habet maiorem proportionem, quàm A ad C; & ideò A ad

C,

C, neque minorem proportionem habebit, quam B ad D. Quare g A ad C eandem rationem habebit, quàm B habet ad D. Vt propoſitum fuerat. Vocetur hæc argumentandi forma *Permutatio rationis.* g *Def. 12. hu.*

Corollarium. Deducitur ex hac demonſtratione, quod ſi prima quantitas ad ſecundam habuerit maiorem rationem, quàm tertia habet ad quartam; permutando prima ad tertiam maiorem rationem habebit, quàm ſecunda ad quartam. Nam ex poſitione, quòd A ad C habeat maiorem proportionem, quàm B ad D, conſequitur, permutando, habere A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. *Pappi 5 VII.*

PROPOSTIO XIII. *Si coniunctæ quantitates proportionales fuerint, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt. Vocetur huiuſmodi argumentandi forma* Diuiſio terminorum rationis. Tab. IV. Fig. 6. EVCL. 17.

Sint A & B, ſimul ſumptæ, ad B, vt C & D, ſimul ſumptæ, ad D. Dico A ad B eſſe, vt C ad D. Si enim hoc verum non eſt habebit A ad B maiorem, aut minorem proportionem, quàm C habet ad D. Et ſit primò proportio maior. a Ergo proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D non erit a *Def. 10. hu.*

maior, eadem proportione commenſurabili (quam habeat E ad B, atque H ad D; & ipſarum communes menſuræ eædem ſint K & N). Quare A maior erit, quàm E, ſed C non erit maior, quàm H. Et quia E & H æquè menſurantur ab ipſis K & N. Ergo *b* tot partes erunt in E, ſingulæ æquales K, quot ſunt in H, ſingulæ æquales N. Rurſus quia K, N æquè metiuntur ipſas B & D, tot *c* partes erunt in B, ſingulæ æquales K, quot ſunt in D ſingulæ æquales N. Quapropter, ſi æqualibus multitudinibus partium contentarum in E & H addantur æquales multitudines partium ipſarum B & D: erunt in EB, ſimul ſumptis, tot partes æquales ipſi K, quot ſunt partes in aggregato H, D contentæ, menſuratæque ab N; & ideò *d* EB erit eædem partes ipſius B, quam eſt H D partes alterius D. Cùmque A maior cònceſſa ſit, quàm E, addita B communi: erit AB maior, quàm EB. Et quia C non maior conceſſa eſt, quàm H, addita D communi: erit CD non maior quàm HD. *e* & quia EB ad B eſt, vt HD ad D, atque AB maior eſt, quàm EB, & CD non eſt maior, quàm HD. Ergo *f* AB ad B maiorem proportionem habèbit, quàm CD ad D, quod eſt abſurdum; Erat enim ex hypotheſi AB ad B, vt

b *Def. 4. huius*

c *Def. 4. huius*

d *Def. 6. huius*

e *Def. 8. huius*

f *prop. 8 huius.*

CD

C D ad D. Non ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D. Similiter oſtendetur, quòd C ad D non habet maiorem proportionem, quàm A ad B; & ideò A ad B neque minorem proportionem habebit, quàm C ad D. g Quapropter A ad B erit in eadem proportione, quam C habet ad D. Quod erat oſtendendum. *g Def. 12. hu.*

Corrollarium Hinc colligitur, quòd, ſi prima ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quam tertia ad quartam, coniungendo habebunt prima & ſecunda, ſimul ſumptæ, ad ſecundam maiorem proportionem, quàm tertia & quarta, ſimul ſumptæ, ad quartam. Ex eo enim, quod proportio A ad B poſita fuit maior, quàm C ad D, demonſtratum eſt A B habere maiorem proportionem ad B, quàm C D habent ad D. *Pappi. 3 VII.*

PROPOSITIO XIV. *Si diuiſæ quantitates proportionales fuerint, hæ quoque coniunctæ proportionales erunt. Vocetur hæc argumentatio* Coniunctio terminorum rationis. Tab. IV. Fig. 7. EVCL. 18.

Sit A ad B, vt C ad D. Dico eſſe A, B, ſimul ſumptas, ad B in eadem ratione, ac ſunt C, D, ſimul ſumptæ, ad D. Si hoc verum non eſt, aliqua alia quantitas H B maior,

ior, vel minor, quàm A B habebit ad ipſam B eandem rationem, quam C D ad D. Ergo *a* diuidendo H ad B erit, vt C ad D; ſed A maior, aut minor eſt, quàm H (eo quod H B inæqualis erat ipſi AB, & tollitur B communis) Ergo *b* A ad B maiorem, aut minorem proportionem habet, quàm H ad eandem B; erat autem C ad D, vt H ad B. Igitur *c* A ad B maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm C habet ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo aliqua quantitas maior, vel minor, quàm AB eandem rationem habere poteſt ad B, quàm CD habet ad D; & ideò A B ad B erit, vt CD ad D. quod erat probandum. Vocetur hæc argumentandi forma *Coniunctio terminorum rationis*.

a prop. 13. hu. *b prop. 2. huius* *c prop. 6. huius*

Corollarium Colligitur pariter, quòd, ſi quantitas prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad quartam, diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

Campani 29 V

Conceſſum enim fuit, quod A B ad B habeat maiorem proportionem, quàm C D ad B; & demonſtratum *d* eſt A ad B maiorem proportionem

d prop. 14. hu.

por-

portionem habere, quàm C ad D.

PROPOSITIO XV. *Si quantitatum aggregata fuerint, vt ablatæ portiones: erunt reſidua, vt aggregata. Et ſi portiones proportionales fuerint: aggregata eandem rationem habebunt, quam portiones.* Tabula IV. Fig. 8. 9. EVCL. 19. & 12. P.

Sit primò aggregatum A, C ad aggregatum B, D, vt ablata portio C ad ablatam D. Dico reſiduum A ad reſiduum B eſſe vt A C ad B D. Quoniam AC ad BD eſt, vt C ad D. Ergo *a* permutando A C ad C eſt, vt B D ad D: Et diuidendo *b* A ad C erit vt B ad D. Et inuertendo *c* C ad A erit, vt D ad B; Et coniungendo *d* CA ad A erit vt DB ad B. Et iterum permutando *e* C A ad D B erit, vt A ad B. Quod erat primum.

a prop. 12. hu. *b prop. 13. hu.* *c Prop. 9. huius* *d prop. 14. hu.* *e prop. 12. hu.*

Secundò ſit A ad B, vt C ad D. Dico A C ad B D eſſe vt A ad B, vel vt C ad D. Quia A ad B eſt, vt C ad D, erit permutando *f* A ad C, vt B ad D: Et coniungendo *g* AC ad C vt BD ad D. Et iterum permutando *h* AC ad BD erit, vt C ad D, ſeu vt A ad B. Et ſi rurſus ſit E ad F, vt C ad D. Quia A C ad BD eſt, vt eadem C ad eandem D. Ergo rurſus erunt quatuor

f prop. 12. hu. *g prop. 14. hu.* *h prop. 12. hu.*

quantitates proportionales AC ad BD, vt E ad F; & ideo, vt prius A, C, E erunt ad B, D, F, vt E ad F, ſeu vt A ad B. Quod propoſitum fuerat.

EVCL. 15. V. PROPOSITIO XVI. *Si quatuor quantitates eiuſdem generis proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.* Tabula IV. Fig. 10.

Sint quatuor quantitates eiuſdem generis A ad B in eadem proportione, ac C ad D; ſitque A omnium maxima, & D minima. Dico A & D, ſimul ſumptas, maiores eſſe, quàm B & C ſimul. Ponatur F æqualis exceſſui maximæ A ſupra C & H æqualis exceſſui ipſius B ſupra minimam D. Patet C & F ſimul æquales eſſe A, atque D & H ſimul, æquales eſſe B. Et quoniam, vt A ad B, ſeu, vt totum FC ad totum HD, ita eſt C ad D ablatum ad ablatum. Ergo *a* reſiduum F ad reſiduum H erit, vt totum ad totum, ſcilicet, vt A ad B; ſed quia A, vt maxima maior eſt, quàm B: erit quoque F maior, quàm H. (Nam ſi non maior eſſet, haberet *b* A ad B maiorem proportionem, quàm F ad H, quod eſt falſum: Oſtenſæ enim fuerunt A, B, F, H, proportionales), ſi igitur inæqualibus F & H addantur communiter ambæ

a prop. 15 huius

b ax. 6 huius.

C, D

C, D ſimul, erit *c* ſumma quantitatum F, C & D maior, quàm ſumma quantitatum H, D, & C: Sunt verò F, C & D æquales A & D (cùm FC oſtenſa ſit æqualis A & D ſit communis); atque eadem ratione H, D & C æquales ſunt B & C. Quare maxima A cum minima D maiores ſunt, quàm B, C ſimul. Quod erat, &c. *c Ax. 4 lib. 1.*

Corollarium Manifeſtum eſt, quòd, ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, erunt directè, & viciſſim vnà maiores, aut vnà æquales, aut vnà minores. EVCL. 14. V.

Fuit enim A ad B, vt F ad H, & oſtenſum eſt, *d* quando A maior eſt, quàm B, non eſſe F æqualem, aut minorem ipſa H, & contra. Igitur antecedentes A & F erunt vnà maiores, aut vnà æquales, aut vnà minores conſequentibus B & H. Rurſus quia *e* viciſſim A ad F eſt, vt B ad H. Igitur A & B ſunt vnà maiores, aut vnà æquales, aut ſimul minores ipſis F & H. *d prop. 16. hu.* *e prop. 12. hu.*

PROPOSITIO XVII. *Si duabus ſimilibus proportionibus commenſurabilibus duæ aliæ ſimiles proportiones commenſurabiles continuentur, termini priores ad poſteriores erunt in eadem commenſurabili proportione.* Tabula IV. Fig. 11.

Sit A ad B in eadem commenſurabili ratione, quam habet C ad D; atque B ad E ſit in eadem commenſurabili proportione, quam D habet ad F. Dico A ad E in eadem ratione commenſurabili eſſe, in qua C ad F. Sit G communis menſura ipſarum A, B; atque H ſit communis menſura duarum B, E, & intelligatur *a* K toties metiri ipſam G, quoties H ipſam B metitur. Ergo *b* permutando K toties metitur ipsã H, quoties G ipsã B menſurat; cũq; H menſuret ipſas B & E: Igitur *c* K metitur ipſas B & E. Rurſus quia K metitur ipsã G, ſed G mẽſurat ipſas A, B; Ergo *d* eadem K metitur, nedùm ipſam E, ſed etiam ipſas A & B. Poſtea intelligatur *e* O, quæ toties menſuret ipſam D, quoties K metitur B, atque M ſit ad O, vt A ad K, pariterque N ſit ad O, vt E ad K. Et quoniam A, & M æquè multiplices ſunt ipſarum K & O, pariterque E, & N æquè multiplices ſunt earundem K & O. Ergo *f* A ipſius E eædem partes eſt, ac M alterius N; ſuntque B & D æquè multiplices earundem K & O: Igitur *g* A & M eædem partes ſunt ipſarum B & D; ſed C ad D erat, vt A ad B: Ergo *h* C & M eædem partes ſunt eiuſdem D; ideoque *i* C æqualis eſt M. Eodem modo oſtendetur F æqualis ipſi N. Quare *l* C ad

a *Ax.3 huius.*
b *prop. 10. hu.*
c *Ax.1 huius.*
d *Ax.1 huius.*
e *Ax 3 huius.*
f *Def.6 huius.*
g *Def.6 huius.*
h *Prop. 7.huius*
i *prop.4 huius.*
l *prop.3 huius.*

ad F erit, vt M ad N; & oſtenſa fuit A ad E, vt M ad N. Igitur *m* A ad E erit, vt C ad F. Quod erat probandum. *m prop. 7. huius*

Corollarium Deducitur ex demonſtratione huius propoſitionis, quòd duæ quantitates, quæ vni tertiæ commenſurabiles ſunt, inter ſe quoque ſunt commenſurabiles. EVCL. 12. X.

Nam A & E eidem B commenſurabiles poſitæ fuerunt; eo quod G erat communis menſura ipſarum A & B; nec non H erat communis menſura ipſarum B & E: & oſtenſum *n* fuit K communi menſura extremas A & E metiri. *n prop. 17. hu.*

PROPOSITIO XVIII. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales, habebunt antecedentes eandem rationem quoque ad duas quantitates, eandem proportionem commenſurabilem habentes eaſdem conſequentes.* Tabula IV. Fig. 12.

Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D, & habeat E ad B eandem proportionem commenſurabilem, quam H habet ad D. Dico A ad E eſſe, vt C ad H. Si enim hoc verum non eſt habebit A ad E maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et ſit primò proportio maior, ſi fieri poteſt, *a* Ergo proportio A ad E maior *a Def. 10. hu.*

ior erit, proportio verò C ad H non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam habeant N ad E, atq; O ad H); & ideo A maior erit, quàm N, ſed C non erit maior, quàm O. Et quoniam N ad E, atque O ad H ſunt in eadem ratione commenſurabili; pariterque E ad B, atq; H ad D ſunt in eadem proportione commenſurabili. Ergo *b* N ad B eſt in eadem proportione commenſurabili, quam O habet ad D; eſtque A maior, quàm N & C non maior, quàm O. Igitur *c* A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D, quod eſt impoſſibile: Suppoſitæ enim fuerunt A, B, C, D proportionales. Non ergo A ad E habebit maiorem proportionem, quàm C ad H. Similiter oſtendetur, quòd C ad H non habet maiorem proportionem, quàm A ad E; & ideò A ad E neque minorem proportionem habebit, quàm C ad H *d* Quare A ad E eſt, vt C ad H. Quòd erat probandum.

b prop. 17. hu.

c prop. 8. huius

d Def. 12. hu.

EVCL. 22. V.

PROPOSITIO XIX. *Si proportionibus ſimilibus pares multitudines proportionum ſimilium addantur ordinatè, erunt termini priores ad poſteriores in eadem ratione. Vocetur talis argumentandi forma, Compoſitio ordinata proportionum.* Tabula IV. Fig. 13. 14.

Sit

Sit proportio A ad B ſimilis, vel eadem proportioni quantitatis C ad D, & ijs addantur aliæ proportiones ſimiles, vt ſit B ad G, vt D ad H. Oſtendendum eſt proportionem A ad G, eandem eſſe, quæ ipſius C ad H. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad G maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et ſi fieri poteſt, ſit primò proportio maior. Ergo *a* proportio A ad G maior erit, proportio verò C ad H non erit maior eadem proportione commenſurabili (quam habeant K ad G & N ad H); & ideo A maior erit quàm K, at C non erit maior, quàm N. Quoniam B ad G eſt, vt D ad H; atque K ad G eandem proportionem commenſurabilem habet, quam N ad H. Ergo *b* vt B ad K, ita eſt D ad N; & inuertendo *c* K ad B erit, vt N ad D: eſtque A maior, quàm K, at C non maior, quàm N. Ergo *d* A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod eſt abſurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo A ad G maiorem proportionem habet, quàm C ad H. Similiter oſtendetur, quòd C ad H non habet maiorem proportionem, quàm A ad G; & ideo A ad G neque minorem proportionem habebit, quàm C ad H. & propterea *e* A ad G erit, vt

a Def. 10. hu.
b prop. 18. hu.
c prop. 9. huius
d prop. 2. huius
e Def. 12. hu.

dem pars ſit ipſius S atque H alterius R. Ergo *f* erit A ad S, vt C ad R. f *prop. 19. hu.*

PROPOSITIO XX. *Si proportionibus ſimilibus aliæ proportiones ſimiles perturbatè addantur: erunt proportiones, ex paribus multitudinibus proportionum compoſitæ, ſimiles quoque inter ſe. Vocetur autem hac argumentandi forma* Compoſitio perturbata proportionum. Tab: IV. Fig. 15. EVCL. 23. V.

Sit quantitas A ad B, vt C ad D & his proportionibus ſimilibus addantur duæ aliæ proportiones ſimiles, ſed ordine perturbato ita vt ſit B ad E, ſicut F ad C. Dico proportionem A ad E, compoſitam ex proportionibus A ad B & B ad E eandem eſſe, quæ ipſius F ad D; quæ nimirum compoſita eſt ex iiſdem proportionibus C ad D & F ad C. Quoniam quam proportionem habet B ad E, habebit aliqua *a* alia quantitas ad ipſam A licet illa ſit ignota, tamen quia dari poteſt, ſupponatur eſſe G, ſeu vocetur G. Et quoniam G ad A eſt, vt B ad E; ſed F ad C eſt, vt eadem B ad eandem E. Ergo *b* G ad A eſt, vt F ad C, & A ad B eſt, vt C ad D. Ergo *c* ex compoſitione ordinata erit G ad B, vt F ad D. Poſtea quia, vt G ad A, ita eſt B ad E. a *Axi. 3. huius* b *prop. 7 huius.* c *prop. 19. hu.*

d prop. 12. hu. E. Ergo *d* permutando, vt G ad B, ita eſt A ad E: ſed vt G ad B, ſic fuit oſtenſa F ad D. Igitur, *e* vt *e prop. 7 huius.* A ad E, ita erit F ad D.

Si rurſus plures aliæ proportiones ſimiles E ad H & K ad F ſucceſſiuè addantur, ſemper eodem modo conſiderando tres quantitates, A E & H, & tres aliæ K, F & D, vt prius oſtendetur compoſitæ proportiones A ad H & K ad D ſimiles eſſe inter ſe. Quod erat, &c.

PROPOSITIO XXI. *Si à proportionibus ſimilibus auferantur proportiones ſimiles, ſiue ordinatè, ſiue perturbatè: reſiduæ proportiones ſimiles quoque erunt.* Tabula IV. Fig. 16. 17. 18.

Sit proportio cuiuſlibet quantitatis A ad B, vt C ad D; atque ab his proportionibus ſimilibus, ſiue eiſdem tollantur eædem proportiones, primò ordinatè, ita vt ſit A ad E, vt C ad F. Dico reſiduas proportiones E ad B, & F ad D eſſe eaſdem.

a prop. 9 huius. Quia *a* inuertendo, vt E ad A, ita eſt F ad C, & vt A ad B, ita eſt C *b prop. 19. hu.* ad D. Ergo componendo *b* ordinatè, vt E ad B, ita erit F ad D.

Tollantur ſecundò perturbatè proportiones eædem, ita vt ſit A ad E, vt F ad D. Dico reſiduas proportiones E ad B & C ad F eſſe eaſdem. Quoniam inuertendo *c* eſt, vt *c prop. 19. hu.*

B ad

B ad A, ita D ad C, & vt A ad E, ita eſt F ad D; Ergo ex *d* compoſitione perturbata, vt B ad E, ita eſt F ad C; & inuertendo *e* vt E ad B, ita eſt C ad F. Quod erat oſtendendum. *d pr. 20. huius. e prop. 9 huius.*

Corollarium. Ex tribus præcedentibus propoſitionibus elicitur, ſi aliqua proportio compoſita fuerit ex aliquibus proportionibus, eam quoque componi ex iiſdem proportionibus, quocunque ordine poſitis.

Si enim proportio A ad B, interpoſitis terminis C, D, & E, ſit compoſita ex proportionibus 1, 2, 3. 4, eadem erit compoſita ex eiſdem proportionibus, ſed ordine perturbato 2, 1, 4, 3, interpoſitis alijs terminis F, G, & H. Nam, *f* vt A ad D, ita eſt A ad G; & rurſus, *g* vt D ad B, ita eſt G ad B. Ergo *h* A ad B eſt, vt A ad B alterius ordinis. *f pr. 20. huius g pr. 20. huius. h pr. 20 huius.*

PROPOSITIO XXII. *Si duæ quantitates ad duas conſequentes habuerint eandem rationem, atque duæ alia ad eaſdem conſequentes habeant etiam eandem rationem: habebunt antecedentes ſimul ſumptæ, eandem rationem ad eaſdem conſequentes.* Tab. IV. Fig. 19. EVCL. 24. V.

Sit A ad B, vt C ad D, atque F ad eandem B ſit, vt H ad eandem D. Dico duas antecedentes A &

F ſimul, habere ad B eandem rationem, quam duæ C & H ſimul ad D. Quoniam vt F ad B, ita eſt H ad D. *a* Ergo inuertendo, vt B ad F, ita eſt D ad H; ſed A ad B eſt, vt C ad D: ergo *b* componendo ordinatè erit, vt A ad F, ita C ad H; & coniungendo *c* erunt A & F ad F, vt C & H ad H: ſed F ad B erat, vt H ad D. Ergo *d* rurſus, ex compoſitione ordinata, erunt AF ſimul, ad B, vt HC ſimul ſumptæ, ad D. Quod erat oſtendendum.

a prop. 9. huius *b pr. 19 huius.* *c pr. 14. huius.* *d pr 19. huius.*

PROPOSITIO XXIII. *Si fuerint quatuor quantitates, & quælibet alia proportionales commenſurabiliter conſequentibus, fuerint vnà maiores, aut ſimul æquales, aut vnà minores antecedentibus ordinatè: erunt quatuor illæ quantitates proportionales.* Tab. IV. Fig. 20.

Sint quatuor quantitates, prima A, ſecunda B, tertia C, & quarta D; & inſuper quinta G ad B eandem rationem commenſurabilem habeat, quam ſexta H ad D, ſintque dictæ commenſurabiles proportiones, quælibet ex infinitis, quæ proponi poſſunt; & quotieſcumque G eſt æqualis primæ A ſit pariter H æqualis tertiæ C, & quoties G minor eſt, quàm A, ſit pariter H minor, quàm C, & quotieſcumque G maior eſt,

quàm

quàm A reperiatur ſemper H maior, quàm C, & hoc ſemper verificetur in infinitis proportionalitatibus cōmenſurabilibus. Dico 1 A ad 2 B eandem proportionem habere, quam tertia C ad quartam D. Si hoc verum non eſt, habebit A ad B maiorem, aut minorem rationem, quàm C ad D. Et ſit primò proportio maior, ſi fieri poteſt. Ergo *a* proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D non erit maior eadem proportione commenſurabili (quàm intelligatur habere G ad B, atque H ad D) eritque A maior, quàm G, at C non erit maior, quam H. Quare duæ quantitates G, & H eandem rationem commenſurabilem habentes, ad duas conſequentes B & D non erunt vnà minores antecedentibus, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D. Simili ratiocinio oſtendetur C ad D non habere maiorem rationem, quàm A ad B; vnde A ad B non habebit minorem proportionem, quàm C ad D; ſed neque maiorem rationem habebat, vt oſtēſum eſt. Ergo *b* quatuor quantitates A, B, C, D, ſunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

a Def. 20. huius.

b Def. 12. huius.

PROPOSITIO XXIV. *Si fuerint quatuor quantitates, & duæ aliæ propor-*

-portionales conſequentibus ſint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus exceſſu, vel defectu à prima minori quocunque dato, erunt illa proportionales. Tabula IV. Figura 21. 22.

Sint quatuor quantitates A B, C, D, F, & duæ aliæ H & O quamlibet proportionem eandem habentes ad C & F, ſint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus A B & D, ita vt exceſſus vel defectus ipſius H à prima AB minor ſit quacunque aſſignabili quantitate ex infinitis, quæ proponi poſſunt. Dico A B ad C eſſe in eadem ratione, ac D ad F. Si enim hoc verum non eſt, aliqua a alia quantitas maior, vel minor, quàm AB in natura reperiri poterit, quæ habeat ad C eandem rationem, quam D habet ad F, & ſit illa, vel vocetur G B, quæ primò ſit minor, quàm A B, deficiens ab ipſa quocunque defectu A G. Et quoniam H, & O proportionales ipſis C & F ſupponuntur eſſe vnà minores antecedentibus A B & D, ita vt defectus ipſius H à prima A B minor ſit quacunque aſſignabili quantitate, poterit eſſe defectus ipſius H à prima AB minor, quàm AG; & ideò H maior erit, quàm GB, dum O minor ſupponitur, quam D; eſt verò GB ad C in eadem ratioue, ac D ad F. Igitur

a *Axi. huius.*

b H

b H ad C maiorem proportionem habet, quam O ad F, quod eſt falſum; ſuppoſita enim fuit H ad C, vt O ad F. Nulla ergo quantitas minor quàm AB eandem rationem habebit ad C, quàm D habet ad F. *b prop. 8. hu.*

Secundò ſit G B maior, quàm AB exceſſu quolibet GA. Et quia H & O proportionales ipſis C & F, ſupponuntur vnà maiores antecedentibus exceſſu à prima minori quocunque dato GA, propterea erit H minor, quàm G B. Et, vt priùs, oſtendetur O ad F maiorem proportionem habere, quàm H ad C, quod eſt abſurdum. Erant enim ex hypotheſi H & O proportionales ipſis C & F. Nulla ergo quantitas maior, quàm A B, ſicuti prius nulla minor, habebit eandem rationem ad C, quàm D habet ad F. Igitur ipſamet AB ad C eandem proportionem habebit, quam D habet ad F. Quod erat propoſitum.

SCHOLIVM:

Præter hos modos venandi, an quatuor quantitates ſint proportionales nec ne, datur hic alius, qui eſt valdè vſitatus apud Euclidem, & Archimedem.

Si quantitas maior, quàm prima exceſſu minore quouis aſſignabili, habuerit ad ſecundam maiorem

pro-

proportionem, quam tertia ad quartam, & quantitas minor, quàm prima, defectu minore quocunque aſſignabili, habuerit ad ſecundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam: erit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam. Quoniam quantitatis, habentis maiorem, aut minorem proportionem ad ſecundam, quam tertia ad quartam, exceſſus, aut defectus à prima ſupponitur minor quacunque aſſignabili quantitate ex infinitis, quæ proponi poſſunt; ſed quælibet quantitas maior, quàm prima, aliquo exceſſu ipſam ſuperat, qui minor erit aliqua aſſignabili quantitate. Ergo quælibet quantitas maior, quàm prima, habet maiorem proportionem ad ſecundam, quàm tertia habet ad quartam quantitatem; ideoque nulla quantitas maior, quàm prima, habebit ad ſecundam eandem rationem, quam tertia habet ad quartam.

Similiter quælibet quantitas minor, quàm prima, deficit ab ea defectu minore aliqua aſſignabili quantitate; & propterea nulla quantitas minor, quàm prima, habebit ad ſecundam eandem proportionem, quā tertia habet ad quartam. Cùm ergo *c* aliqua quantitas reperiatur in natura, quæ ſit ad ſecundam, vt tertia ad quartam, & illa non poſſit eſſe maior nec minor, quàm prima, licet eiuſ-

c Ax. 3 huius.

eiuſdem generis ſit. Igitur ipſamet prima ad ſecundam habebit eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam.

PROPOSITIO XXV. *Si æquè multiplicium quatuor quantitatum multiplex primæ exceſſerit multiplicem ſecundæ, at multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ: tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habebit, quàm tertia ad quartam.* Tab. IV. Fig. 23. EVCL. *Def. 8. lib. V.*

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & ſumptis E & F æque multiplicibus antecedentium A & C, nec non ſumptis G & H æquè multiplicibus conſequentium B & D, ſitque E multiplex primæ maior, quàm G multiplex ſecundæ; at F multiplex tertiæ non ſit maior, quàm H multiplex quartæ. Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D. Quia E maior eſt quàm G, & F non eſt maior, quàm H: Ergo *a* E ad G maiorem proportionem habet, quàm F ad H; ſed *b* A ad E eſt, vt C ad F, cùm ſint illarum pars eadem: ergo *c* A ad G maiorem rationem habet, quàm C ad H: & rurſus *d* G ad B eſt, vt H ad D, cùm ſint harum æquè multiplices. Igitur *e* A ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D. Quod erat oſtendendum.

b Axi. 6. huius
b Def. 8 huius.
c ex pr. 19. hu.
d Def. 8. hu.
e ex pr. 19. hu.

PRO-

EVCL. conuer. Def.8.V PROPOSITIO XXVI. *Si prima quantitas ad ſecundam maiorem proportionem habuerit, quam tertia ad quartam, reperiri poſſunt æquè multiplices antecedentium, atque aliæ æquè multiplices conſequentium, quarum multiplex primæ excedat multiplicem ſecunda, at multiplex tertia non excedat multiplicem quartæ.* Tabul. IV. Fig.24.

Habeat AB ad C maiorem proportionem, quàm D ad E. Dico fieri poſſe, quod proponitur. Quoniam AB ad C maiorem rationem habet quàm D ad E. Ergo *a* aliqua quantitas minor, quàm prima AB, eandem rationem habebit ad ſecundam C, quàm tertia D ad quartam E: vocetur illa AF, & ſumantur quantitatum AF, AB & D æquè multiplices MI, MK & N, hac lege, vt KI, earum differentia, maior ſit, quàm C. Poſtea ſumantur æquè multiplices RS ipſius C & X alterius E, hac tamen lege, vt RS ſit minima omnium, excedentium ipſam MI, ita vt exceſſus ſit minor, aut æqualis vni eius parti RV, ſeu C; ideoque exceſſus ipſius RS, ſupra MI erit minor, quàm IK, quæ maior facta eſt, quàm C: vnde MK maior erit, quàm RS & MI minor eadem RS. Oſtendendum modo eſt in hiſce æquè multiplicibus, quòd dùm MK maior eſt ipſa RS, ipſam

a prop. 5. hu.

N,

N, aut æqualem, aut minorem eſſe ipſa X. Quoniam, vt AF ad C, ita eſt D ad E, & ſumptæ ſunt duæ MI & N æquè multiplices ipſarum antecedentium AF & D, nec non duæ RS & X æquè multiplices conſequentium C & E. Ergo *b* vt MI ad RS, ita eſt N ad X. Quare *c* ſicut M I minor eſt, quàm RS, ita N minor erit, quàm X: fuit autem oſtenſa MK maior, quàm RS. Igitur quando MK maior eſt, quàm RS, non eſt N maior, quàm X. Quod erat propoſitum.

b ex prop. 19 huius.
c Corol. prop. 16 huius.

PROPOSITIO XXVII. *Si fuerint quatuor quantitates & antecedentium æquè multiplicia ab æquè multiplicibus conſequentium, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio vtrunque ab vtroque, vel vnà deficiunt, vel vnà æqualia ſunt, vel vnà excedunt, ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent: erunt illæ quatuor quantitates proportionales.* Tab. IV. Fig. 25.

EVCL. *Def. 6. V.*

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & ſint E & F quæcunque æquè multiplices antecedentium A & C ex infinitis æquè multiplicibus, quæ aſſignari poſſunt; nec non ſint G & H quæcunque æquè multiplices, ideſt valeant pro infinitis alijs æquè multiplicibus conſequentium B & D; & quotieſcunque E maior eſt, quàm G ſemper

b prop. 2. huius.

ſit

ſit F maior, quàm H, & quotieſcunque E æqualis eſt ipſi G ſit pariter F æqualis ipſi H, & in quacunque multiplicatione E minor eſt quàm G, ſemper ſit F minor quàm H. Dico A ad B eandem rationem habere quàm C ad D. Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad B, aut maiorem, aut minorem rationem, quàm C ad D: & in quocunque *a* caſu, ſi multiplex E exceſſerit ipſum G, aliquando F non excedet ipſam H, vel ſi F excedit ipſam H in aliqua multiplicatione E non excedet ipſam G, quæ ſunt falſa, & contra hypoteſin. Non ergo A ad B maiorem, aut minorem proportionem habere poteſt, quàm C ad D. Quare *b* A, B, C, & D erunt proportionales. Quod erat oſtendendum.

a pr. 26. huius.

b Def. 12. hu.

Finis Libri tertij.

In qua noua forma proportionum theoricæ demonſtrantur.

Completa impreſſione horum elementorum hoc ſupplemen um addere decreui, quod in fine lib. tertij apponi poteſt, vel in principio operis immediatè poſt proœmium.

Aſſumuntur primo loco eædem 12 definitiones pagina 97. expoſitæ, & præter pronunciata ſex in pag. 102. exponi debent duo alia.

AXIOM. VII. Si fuerint duę proportiones commenſurabiles ſimiles interſe, & tertia prop-tio maior fuerit vna illarum: erit quoque maior reliqua. Et ſi illa minor fuerit erit quoque minor reliqua.

VIII. Et ſi duæ antecedentes quãtitates prima 3 & tertia 6 fuerint eædem partes conſequentium 2 & 4: inuertendo ſecũda 2 & quarta 4 erunt eædem partes antecedentium 3 & 6. Et coniungendo terminos 3 & 2 nẽpe 5. eædem partes erit ſecundi 2, ac 6 & 4 nempe 10. partes eſt 4. Et diuidendo eoſdem terminos ſcilicet differentia 3 & 2, nempe 1. ad 2. erit vt differentia 6, & 4 nempe 2 ad quartum terminum 4.

PROP. I. *T. IV. Fig.* 20. Si quantitas A ad B habuerit eandem prop-tionem quam C habet ad D, ſcilicet ex def. 12 pro-tio A ad B non ſit maior, neç minor ratione C ad D, & habeat G ad B atque H ad D quamlibet

commenſurabilem pro-nem eandem ex infinitis quæ proponi poſſunt. Dico quod G & H ſunt vna maiores, vel vna æquales, vel vna minores antecedentibus A & C. Et è conuerſo.

Si primum verum non eſt ſit G minor A & H non minor quam C. ergo a *def.9.* a proportio A ad B maior eſt,& protio C ad D non eſt maior eadem commenſurabili pro-ne quam G habet ad B, vel H ad D. & ideo b *def.10* b A ad B maioré pro-nem habebit quam C ad D: quod repugnat hypotheſi. igitur quando G minor eſt quam A eſt impoſſibile vt H ſit æqualis,aut maior C. Simili progreſſu oſtendetur quod exiſtente H minore quàm C non erit G æqualis aut maior quam A.quapropterG ipſaA & H ipſa C vna minores, vel vna æquales, vel vna maiores erunt.

Secundo poſitis 4 quantitatibus quarùm pro-tio ignoratur. ſupponantur G & H habere eandem, ſed quamcumque pro-nem commenſurabilem conſequentibus B & D, & quotieſcumque G minor eſt prima A ſit quoque H minor tertia C, & ſi G æqualis fuerit A ſit H æqualis C, & quoties G maior eſt A ſit etiam H maior quam C. Dico A ad B eandem pro-nem habere quam C habet ad D.

Hoc demonſtratur vt in 23 prioris methodi. Fol. 136.

PRO-

PROP. II. *Tab. III. fig. 36.* Æquales quantitates A & B ad eandem C, habent eandem pro-nem; & eadem ad æquales.

Sit D quælibet partes ipſius C, ſcilicet repræſentet infinitas proportiones commenſurabiles. Quia A & B ſupponuntur æquales, ergo quotieſcũq; eadem quantitas D æqualis eſt ipſi A erit quoque æqualis B; & ſi D minor eſt A erit etiam minor quã B, & quoties D maior eſt A erit eadem D maior quam B, igitur *a* A ad C eandem proportionem habet quam B ad eandem C. a *hui.* 1.

Secundo ſit quælibet D commenſurabilis ipſi A, habebit *b* D ad æquales A & B quamlibet eandem pro-nem commenſurabilem; eſtque D minor, vel æqualis aut maior eadem C, quæ repreſentat primam & tertiam, ſcilicet duas antecedentes. ergo *c* proportio C ad A eadem eſt quam C ad B. Quod &c. b *axi.* 4 c *hui.* 1.

PROP. III. Si duæ quantitates A B, CD quarum quantitatum E, F fuerint æquè multiplices vel eædem partes ipſarum M & N: erunt viciſſim AB ipſa CD, & E ipſa F, & M ipſã N maiores, aut vna æquales, vel vna minores.

Demonſtratio erit eadem qua in prop. I. prioris methodi vſi ſumus. fol. 104.

PROP. IV. Inæqualium quantitatum AB & C maior AB ad ean-

dem D maiorem proportionem habet quam minor C. Et eadem D ad maiorem AB habet minorem pronem quam ad minorem C.

Demonſtratur vt in 2. prioris methodi. fol. 106.

PROP. V. Ad eandem quantitatem C rationem habentium, A quæ maiorem pro-nem habet, maior erit quam B, quæ habet minorẽ pro-tionem ad eandem: Et A ad quam eadem C minorem proportionem habet maior erit.

Demonſtratur vt in 5. prioris methodi. fol. 111.

PROP. VI. Si A ad C ſit vt B ad eandem C. Dico A fore æqualem B; & ſi eadem C ad A atque ad B habuerit eandem proportionem, erunt A & B interſe æquales.

Demonſtratur vt in 4 prioris methodi. 110.

PROP. VII. *Tab. VIII. Fig.* 13. Si A ad B fuerit vt C ad D, & pro-tio A ad B eſt maior ratione F ad K. Dico C ad D maiorem quoque rationem habere quam F ad K, & ſi, minor rerit vtraque minor.

ad def. 10 Quia A ad B maiorem pro-nem habet quam F ad K. ergo *a* pro-tio A ad B maior eſt & pro-tio F ad K non maior erit eadem commenſurabili pro-ne quam L habet ad B, & O ad K; & ideo L minor erit quam A, & O non minor erit quam F. Sitque N eædem partes ipſius D ac L

par-

partes eſt ipſius B, ſiue O ipſius K. ergo N *b* minor eſt ipſa C, ſicuti L minor eſt ipſa A. quare pro-tio C ad D maior eſt, & pro-tio F ad K non eſt maior eadem commenſurabili pro-ne quam N habet ad D, ſiue O ad K; & ideo *c* C ad D maiorem pro-nem habet quam F habet ad K. Quod &c. *b hui. 1* *c def. 10*

PROP. VIII. *Tab. III. Fig. 39.* Si proportiones A ad B, & C ad D eædem fuerint vni tertiæ F ad K: erunt eædem interſe.

Sumantur quantitates L, N, O habentes quaſlibet ſed eaſdem pro-nes commenſurabiles ad conſequentes B, D, K. Et quia pro-tio A ad B ponitur eadem ac F ad K. ergo *a* duæ L & O pro-les commenſurabiles conſequentibus erunt vna maiores, vel vna æquales, vel vna minores antecedentibus. eadem ratione N & O erunt vna maiores, aut æquales, vel vna minores antecedentibus. igitur L & N erunt vna maiores vel vna æquales, aut vna minores antecedentibus A & C; & erant L, N quælibet commenſurabiles proportionales conſequentibus. ergo *b* vt A ad B ita eſt C ad D. Quod &c. *a hui. 1* *b eadem*

PROP. IX. *Tab. VIII. Fig. 14.* Si prima A ad ſecundam B eandem pro-nem habuerit quam tertia C ad quartam D. Dico quod *inuertendo* B ad A eſt vt D ad C.

Ponantur E & H quælibet & eadem

dem partes conſequentium B & D. erunt *a* E & H vna maiores, aut æquales, vel vna minores antecedentibus A & C. & inuersè *b* B ipſius E & D alterius H erunt eædem partes. Intelligantur poſtea L ipſius A & N alterius C eſſe eaſdem partes ac eſt B ipſius E, vel D alterius H: & *c* ſiquidem E maior eſt A erit B maior L; pariterque H ipſa C, & D ipſa N maiores erunt; non ſecus ſi E & H minores fuerint quam A & C, erunt quoque B, D minores L & N, & ſi illæ æquales hæ quoque æquales erunt. Cumque L, N ſint quælibet & eædem partes conſequentium A & C & ſunt vna maiores, æquales, vel vna minores antecedentibus B & D. igitur *d* B ad A erit vt D ad C. Quod &c.

a huj. 1. par. 2.
b axi. 8
c huj. 3.
d huj. 1 par. 1.

PROP. X. Si quatuor quantitatum eiuſdem generis AB ipſius E, & CD alterius F æquè multiplices fuerint; & E ipſius F, vel ſolummodo AB ipſius CD multiplex ſupponatur: erit viciſſim reliqua æquè multiplex alterius.

Demonſtratur in 10 prioris methodi pag. 117.

PROP. XI. *Tab. IV. Fig. 16.* Si quantitas A ad B fuerit vt C ad D. Dico viciſſim A ipſa C, & B ipſa D vna æquales, vel vna maiores, aut vna minores eſſe. Et ſi præterea E ad eandem B fuerit vt F ad eandem D. Dico A ipſa E, & C ipſa F vna maiores

iores, vel æquales, aut minores eſſe.

Si primum verum non eſt ſit vna antecedentium A maior C, & B non maior D. ergo *a* A ad B maiorem pro-nem habet quam C ad eandem B; poſtea eadem C ad B eandem aut maiorem pro-nem habebit ad D, cum B ponatur non maior D. igitur A ad B maiorem pro-nem habet quam C ad D. quod eſt contra hypotheſim. non ergo A eſſe poteſt maior C & B non maior quam D. Simili modo oſtendetur quod C non poteſt eſſe maior A & D non maior B, quare quotieſcumque A maior eſt ipſa C erit quoque B maior reliqua D; & quoties A minor eſt C erit B minor D, & ſi æqualis, etiam æqualis erit.

a hui. 5 et 2.

In ſecunda hypotheſi exiſtente A maiore quam E habebit *b* A ad eandem B maiorem pro-nem quam E ad ipſammet B, eſtq; F ad D vt E ad B. ergo *c* A ad B maiorē pro-nem habet quam F ad D, & erat C ad D vt A ad B. igitur *d* C ad D maiorem rationem habet quam F ad eandem D. Et ideo *e* C maior quoq; eſt quàm F. eodem progreſſu exiſtente A minore quam E, oſtendetur C minor F. Quare &c.

b hui. 5 *c hui. 7* *d eadē* *e hui. 5.*

PROP. XII. *Tab. IV. Fig. 4.* Si A & C æquè multiplices fuerint ipſarum B & D. Dico A ad C eandem pro-tionem habere quam B ad D.

Sumantur E & H quælibet eædem partes ipſarum C & D, quarum communes

munes menſuræ eædem ſint R, S. Quia R, S ſunt eadem pars ipſarum C, D eſtque D pars ipſius C. ergo
a hu.10 *a* S eadem pars eſt ipſius R, quam D pars eſt alterius C. eadem ratione H ipſius E eadem pars erit quam S ipſius R, ſeu D ipſius C, vel B
b hui.8 ipſius A. quare *b* A ad B erit vt E
c hui.11 ad H; & ideo *c* E & H erunt vna maiores, aut æquales, vel vna minores antecedentibus A, & B; & ſunt quælibet eædem partes conſe-
d hui.1 quentium C, D. ergo *d* A ad C erit vt B ad D. Quod &c.

PROP. XIII. *Tab. IV. Fig.* 4. Si A ad B fuerit vt C ad D eiuſdem generis cum prioribus. Dico *permutando* A ad C eandem pro-tionem habere quam B ad D.

Sumantur E & H quælibet eædem partes ipſarum C, D, quarum communes menſuræ eædem ſint R, S, erit C ad D vt pars R ad S. ſimiliter vt R
a hu.12 ad S ita erit E ad H, ſeu C ad D, vel A
b hu.11 ad B. ergo *b* E & H erunt vna æquales, vel minores aut vna maiores antecedentibus A & B; & erant E, H eædem & quælibet partes conſequē-
c hui.1 tium. igitur *c* A ad C eſt vt B ad D. Quod &c.

PROP. XIV. *Tab. IV. Fig.* 6. Si AB ad BC fuerit vt DE ad EF. Dico quod *diuidendo* differentia terminorum AC ad eandem conſequentem BC eſt vt differentia DF ad EF.

Sumantur duæ quantitates GB & HE

HE quæ ſint quælibet eædem partes conſequentium CB & FE, quarum communes menſuræ eędem ſint K,N. quare *a* K, N æquè metientur antecedentes GB, HE, nec non conſequentes CB & FE; & proinde *b* K & N æquè metientur earundem differentias GC & HF. quapropter GC ipſius CB eædem & quælibet partes erit ac HF partes eſt ipſius EF. & quia ex hypotheſi AB ad BC erat vt DE ad EF, & ſumptæ fuerunt GB ipſius BC, nec non HE alterius EF eædem quælibet partes. ergo *c* GB ipſa AB, atquè HE ipſa DE vnà minores, æquales, aut vna maiores erunt, & ablatis communibus CB, & FE, quotieſcumque GC minor eſt ipſa AC erit quoque HF minor DF, & quoties GC maior eſt quam AC erit HF maior DF, aut vna æquales. Cumque ſint quatuor quantitates, AC, CB, DF, FE, & duæ aliæ GC, HF ſint quælibet eædem partes conſequentium CB, & FE quæ ſunt vna minores, æquales, vel vna maiores antecedentibus AC, & DF. igitur *d* AC ad CB ſe habet vt DF ad FE. Quod &c.

a def.6.
b axi.8
c hui.1.
d eadem

PROP. XV. *Tab. IV. Fig. 6.* Si AC ad CB fuerit vt DF ad FE. Dico quod *componendo* ſummæ terminorum ad eaſdem conſequentes proportionales ſunt, ſcilicet AB ad BC erit vt DE ad EF.

Intelligatur *a* HE ad EF habere can-

a axi.3

eandem pro-tionem quam AB habet ad BC. ergo diuidendo *b* AC ad CB erit vt HF ad FE; & erat DF ad FE vt AC ad CB. igitur *c* HF & DF ad eandem FE habent eandem pro-tionem, & proinde *d* HF æqualis eſt DF; & addita communi FE erit HE æqualis DE; ideoque *e* DE ad EF erit vt HE ad EF, ſeu *f* quam AB ad BC. Quod &c.

b huius.14 *c hui.8* *d hui.6* *e hui.2* *f hui.8.*

PROP. XVI. Si quantitatum aggregata fuerint interſe vt ablatæ portiones: erunt reſiduæ vt agregata. Et è conuerſo.

Demõſtratur vt in 15. prioris methodi. pag. 126.

PROP. XVII. Si quantitates eiuſdem generis pro-nales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

Demõſtratur vt in 16. prioris methodi. pag. 120.

PROP. XVIII. Si commenſurabilibus pro-tionibus ſimilibus addãtur aliæ ſimiles pro-nes commenſurabiles: component pro-nes commenſurabiles ſimiles.

Demonſtratur in 17. pag. 127.

PROP. XIX. *Tab. IV. Fig.* 12. Si quantitas A ad B fuerit vt C ad D, & B ad E eandem commenſurabilem pro-nem habuerit quam D ad H. Dico quod *compoſita* pro-tiones A ad E & C ad H eædem erunt.

Ponantur N ipſius E & O ipſius H eædem & quælibet partes; & *a* inuer-

a axi.8

uertendo eſt E ipſius B, atque H alterius D eædem partes. ergo *b* N ipſius B eædem partes erit ac O partes eſt alterius D; poſita autem fuit A ad B vt C ad D. igitur *c* N & O vna maiores, aut æquales, vel vna minores erunt antecedentibus A & C; & fuerunt N, O quælibet eædem partes conſequentium E & H. ergo *d* A ad E eſt vt C ad H. Quod &c. b *hu.18* c *hui.1.* d *eadẽ*

PROP. XX. *Tab. IV. Fig.* 13, 14.

Si pro-tionibus ſimilibus A ad B, & C ad D addantur duæ aliæ ſimiles pro-tiones B ad G vt D ad H. Dico quod compoſitæ proportiones A ad G & C ad H eædem ſunt. quæ ex *æquali ordinatè* vocentur.

Ponãtur K ipſius G, & N ipſius H eædem & quelibet partes; & ideo *a* G ipſius K & H alterius N eædem partes erunt: eſtque B ad G vt D ad H. ergo *b* B ad K erit vt D ad N, & inuertendo *c* K ad B erit vt N ad D; & erat quoque A ad B vt C ad D. igitur *d* K & N erunt vna maiores, vel æquales, aut vna minores ipſis A & C; erant autem K & N quælibet eędem partes ipſarum G & H. ergo *e* A ad G eandem proportionem habet quam C ad H. a *axi.8* b *hu.19* c *hui.9* d *hu.11 par.2.* f *hui.1.*

Similiter ſi eiſdem compoſitis ſimilibus pro-tionibus addantur eodem ordine ſimiles pro-nes G ad S vt H ad R oſtendetur quod prima ad tertiam S poſt ſecundam G erit vt C ad R. Quod &c.

PRO-

De Spatijs proportionalibus.

DEFINITIONES.

RECIPROCA triangula, vel parallelogramma ſunt, cùm duo latera circa angulum vnius fuerint duo extrema, & duo latera circa angulum alterius figuræ fuerint duo media quatuor proportionalium. Tabula IV. Fig. 26. I.

Vt duo triangula ABC, DEF, vel duo parallelogramma BG, EH erunt reciproca, ſi fuerit AB ad ED, vt FE ad CB: Hac enim ratione angulus B parallelogrammi BG, vel trianguli ABC continebitur à prima AB, & quarta CB; & angulus E parallelogrammi EH, vel trianguli DEF continebitur à ſecunda DE & tertia EF, quatuor proportionalium.

PARALLELOGRAMORVM ſecundum aliquam rectam lineam applicatorum illud deficere dicitur, quod non occupat totam lineam: Excedere verò quando occupat maiorem lineam rectam, quàm ſit ea, ſecundum quam applicatur: Exceſſus verò, vel defectus dicitur pars, vel productio eiuſdem applicati parallelogrammi, quod ſuper defectum, aut exceſſum lineæ ſuppoſitæ deſcriptum eſt. Tabula IV. Figura 27. II.

Vt parallelogrammum AD applicatum ſuper rectam AB, dicitur deficiens, quando eius latus AC non occupat totam lineam AB. Et dicitur excedens, quando AC maius eſt, quàm AB. Diciturque defectus in primo caſu, vel exceſſus in ſecundo, ipſum parallelogrammum CH.

III. *Si ab eodem puncto diametri parallelogrammi ductæ fuerint duæ rectæ parallelæ lateribus ipſius: parallelogramma, quæ à diametro biſſecantur, vocentur circa diametrum conſtituta; & duo illa parallelogramma quæ à diametro non biſſecantur; vocentur parallelogramma complementi.* Tabula IV. Fig. 28.

Vt ſi in parallelogrammo BD per punctum O, in eius diametro AC aſſumptum, ducantur duæ rectæ, HOG quidem parallela lateri DC, ſeu AB; atque FOE parallela lateri CB, vel DA: vocentur parallelogramma BD, HF, atque EG circa diametrum conſtituta; atque duo parallelogramma DO, & BO, quæ à diametro non biſſecantur: appellentur parallelogramma complementi.

EVCL. 1 VI. PROPOSITIO I. *Triangula, & parallelogramma æquè alta ſunt inter ſe, vt baſes. Et, ſi fuerint inter ſe vt baſes, æquales altitudines habebunt*

bebunt. Tab. IV. Fig. 29. 30.

Sint primò duo triangula ABC,
DEF æquè alta, ſeu inter eaſdem
parallelas AK, BF. Dico triangu-
lum ABC ad triangulum DEF ha-
bere eandem rationem, quam baſis
BC ad baſim EF. Secetur *a* EF in *a prop. 28. lib. 1*
quancumque multitudinem partium
æqualium, quarum vna ſit EI, & in
CB ſumatur SC, quæ ſit quælibet
multiplex ipſius EI: erit *b* SC ipſi- *b Def. 3. lib. 3*
us EF quælibet partes, & coniun-
gantur SA, ID. Quoniam *c* quoti- *c ex pr. 32. lib. 1*
es baſis EI metitur baſim EF, toties
triangulum EID metitur æquè al-
tum triangulum DEF, & quoties *d* *d ex pr. 32. lib. 1*
EI metitur CS, toties triangulum
DEI, metitur æquè altum triangu-
lum ASC. *e* Ergo triangulum AS *e Def. 6 lib. 3.*
C quælibet & eædem partes eſt tri-
anguli DEF, quemadmodum SC
eſt partes alterius EF. Sunt ergo
quatuor magnitudines, prima BC,
ſecunda EF, tertia triangulum A
BC, quarta triangulum DEF, &
duæ aliæ, ſcilicet baſis SC, & tri-
angulum ASC ſunt quælibet, &
eædem partes conſequentium EF,
& trianguli DEF, ideſt *f* ad eas ha- *f Def. 8 lib 3.*
bent quamlibet, & eandem ratio-
nem commenſurabilem; & quoties
SC eſt æqualis primæ BC, *g* neceſ- *g prop. 32. lib. 1*
ſariò triangulum ASC æquale erit
tertiæ, ſcilicet triangulo ABC; &
quoties cumque SC maior eſt, quam

h ex pr. 32. lib. 1 BC, toties *h* ASC maius eſt, quàm ABC, & cùm SC minor eſt, quàm BC, ſemper ASC minus erit, quàm ABC. Ergo *i* prima BC ad ſecundam EF eandem rationem habet, *i prop. 23. lib. 3* quam tertia ABC triangulum, ad quartam magnitudinem, triangulum DEF. Quod erat oſtendendum.

Secundò ſint parallelogramma BH, EK eiuſdem altitudinis. Dico proportionalia eſſe baſibus. Ductis diametris AC, DF; erunt triangula ABC, DEF æquè alta; & *l ex prima parte huius* ideo *l* inter ſe erunt, vt baſes BC, EF; ſed *m* vt triangulum ABC ad *m prop. 11. lib. 3* triangulum DEF, ita duplum ad duplum, ideſt *n* parallelogrammum BH ad parallelogrammum *n prop. 16. lib. 1* EK. Ergo *o* parallelogrammum B *o prop. 7. lib. 3* H ad parallelogrammum EK, erit vt baſis BC ad baſim EF. Vt erat probandum.

Tertio ſit triangulum ABC ad triangulum DEF, ſeu parallelogrãmum BH ad parallelogrammum EK, vt baſis BC ad baſim EF. Dico altitudines triangulorum ſeu parallelogrammorum æquales eſſe. Si hoc verum non eſt, ipſi DEF æquè altum ſecètur ſpatium MBC maius, *p ex prima par-* aut minus, quàm ABC: Ergo *p* erit MBC ad DEF, vt baſis BC ad baſim EF; Erat autem, vt BC ad *q prop. lib. 3* EF, ita ABC ad DEF. Ergo *q* M BC

BC & ABC eandem rationem habent ad idem ſpatium DEF; ideoque *r* MBC & ABC æqualia ſunt, pars & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo alia altitudo, quàm ipſius ſpatij ABC æqualis eſt altitudini ſpatij DEF. Vnde patet propoſitum. *r prop. 4 lib. 3.*

Facili negotio ex hac propoſitione deducuntur tres primæ propoſitiones, quæ in ſecundo libro ſatis prolixè demonſtrauit Euclides.

Sit primo recta linea A inſecta, & BC ſecta ſit in D. Dico parallelogrammum rectangulum ſub A & BC comprehenſum, (ideſt cuius baſis eſt BC, altitudo A circa angulum rectum) æquale eſſe rectangulis parallelogrammis ſub A & BD, atque ſub A & DC contentis. Quoniam hæc omnia parallelogramma rectangula ſunt æquè alta, cùm habeant communem altitudinem menſuratam à recta A. Ergo *ſ* erunt inter ſe, vt baſe; ſed baſes BD, DC, ſimul ſumptæ, æquales ſunt baſi BC. Ergo *t* rectangula ex BD in A, & ex DC in A, ſimul ſumpta æqualia ſunt rectangulo ex baſi BC in altitudine A ducta. Quod erat probandum. EVCL. 1. II. *ſ prop. 1 huius, & prop. 22. lib. 3* *t Corol. 1. prop. 16. lib. 3*

Secundò ſupponatur inſecta A æqualis totæ BC, erit eadem ratione, parallelogrammum ex A in BC, ſeu ex BC in CB, ideſt *u* quadra- EVCL. 2. II. *u prop. 34. lib. 1*

dratum ipſius BC, æquale duobus rectangulis ex A, ſeu BC in BD, & ex BC in CD ſimul ſumptis.

EVCL. 3. II. Tertiò ſupponatur 'inſecta A æqualis ſegmento DC, erit rurſus pa- rallelogrammum ex A, ſeu DC in CB æquale duobus rectangulis ex A, ſeu CD in BD, & ex DC in DC, ſeu *x* quadrato ipſius DC.

x prop. 34. lib.1

EVCL. 2. VI. PROPOSITIO II. *Recta linea parallela baſi trianguli ſecat proportionaliter eius latera. Et recta, ſecans proportionaliter latera trianguli, parallela eſt eius baſi.* Tabula IV. Fig. 32.

Sit triangulum ABC & DE recta parallela baſi BC ſecet eius latera in D & E. Dico BD ad DA eſſe in eadem ratione, ac CE ad EA. Coniungantur rectæ DC, EB. Quoniam duo triangula DBE, ECD eandem baſim DE habent, & ſunt inter parallelas DE, BC. Ergò *a* æqualia inter ſe ſunt, & ideo *b* ad idem triangulum ADE eandem rationem habent: ſed *c* triangulum BED ad triangulum DEA eandem rationem habet, quam baſis BD ad baſim DA (eò quod perpendicularis, à puncto E ſuper rectam AB, communis altitudo eſt triangulorum DEB, DEA). Ergo *d* triangulum DCE ad triangulum DAE eſt, vt

a prop. 32. lib.1 *b prop. 3. lib. 5* *c prop. 1 huius.* *d prop. 7. lib. 5* *e prop. 11. huius*

BD

BD ad DA. *e* Rurſus cùm triangulum CDE ad triangulum EDA ſit, vt baſis CE ad baſim EA, quia ſunt eiuſdem altitudinis. Ergo, *f* vt BD ad DA, ita eſt CE ad EA. Quod erat primò oſtendendum. *f prop. 7 lib. 3.*

Secundò ſit BD ad DA, vt CE ad EA. Dico DE parallelam eſſe baſi BC. Si hoc verum non eſt, ſit *g* EH parallela baſi BC; Ergo, *h* vt CE ad EA ita erit BH ad HA: erat autem, vt CE ad EA, ita BD ad DA; Ergo, *i* vt BH ad HA, ita eſt BD ad DA. Et componendo *l* erit BA ad AD, vt BA ad AH. Quare *o* AD & AH æquales erunt, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo EH, ſed ipſa ED parallela eſt baſi BC. Quod erat probandum. *g corol. prop. 16. lib. 1.* *h ex prima parte huius* *i Prop. 7. lib. 3* *l prop. 14 lib. 3* *n prop. 13. lib. 3* *o prop. 4. lib. 3*

PROPOSITIO III. *Recta linea, ſecans bifariam angulum verticis trianguli, ſecabit baſim in eadem ratione laterum, ita vt homologa ſint conterminalia. Et, ſi baſis ſegmenta diſſecta ſint in eadem ratione laterum, erit ſectus bifariam angulus verticis.* Tabula IV. Fig. 3. EVCL. 3. *VI.*

In triangulo ABC recta AD efficiat angulos DAB, DAC æquales inter ſe. Dico BD ad DC eſſe, vt BA ad AC. Producta CA, vt fiat *a* EA æqualis BA, & iungatur EB. *a prop. 3. lib. 1*

b prop. 6. lib. 1. Quoniam *b* anguli E & ABE, oppoſiti lateribus æqualibus BA, EA ſunt inter ſe æquales; Ergo *c* externus angulus CAB duplus eſt anguli ABE: ſed angulus CAB duplus eſt etiam anguli DAB; Ergo duo anguli DAB & EBA (alterni) æquales ſunt; & ideo *d* AD parallela eſt EB, baſi trianguli CEB. Quare *e* BD ad DC eſt, vt EA ſeu *f* ei æqualis BA, ad AC. Vt erat probandum.

c prop. 18. — d prop. 16. lib. 1 — e prop. 2 huius. — f prop. 3 lib. 3.

Secundò ſit BD ad DC, vt BA ad AC. Dico rectam DA ſecare bifariam angulum BAC. Si hoc verum non eſt, alia recta HA ſecet angulum BAC bifariam. Iam, *g* vt BA ad AC, ita erit BH ad HC: erat autem, vt BA ad AC, ita BD ad DC; Ergo *h* vt BH ad HC, ita eſt BD ad DC; & componendo *i* BC ad HC erit, vt BC ad CD; ideoque *l* CH & CD æquales ſunt, pars & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo aliqua alia recta præter DA ſecat bifariam angulum CAB. Quod erat oſtendendum.

g prima par. hu. — h prop. 7 lib. 3. — i prop. 14. lib. 3 — l prop. 4 lib. 3.

EVCL. 4. VI. PROPOSITIO IV. *Triangulorum inter ſe æquiangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et homologa ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Vocentur autem huiuſmodi triangula* Similia inter ſe. Tab. IV, Fig. 34.

In

In triangulis ABC, DEF ſint duo anguli A & D æquales inter ſe; pariterque duo anguli B & E æquales; vnde *a* tertij anguli C & F æquales erunt, cùm ſint complementa ad duos rectos in vtroque triangulo. Dico eſſe AB ad BC, vt DE ad EF & BC ad CA, vt EF ad FD, atque CA ad AB, vt FD ad DE (hoc enim modo homologa latera, ideſt antecedentia proportionalitatis, ſubtendunt angulos æquales). Secentur *b* GB æqualis DE & NC æqualis DF; & ducantur *c* GH quidem parallela AC, atque NK parallela AB. Quoniam eidem angulo A æqualis eſt D ex hypotheſi, & BGH propter parallelas GH, AC, *d* æqualis eſt eidem A. Ergo anguli BGH & D æquales ſunt, & erant æquales anguli B & E, atque ſubiacentia latera GB, DE æqualia erant. Ergo *e* BH æqualis eſt EF. Eodem modo in triangulo NKC erit KC æqualis EF. Poſtea quia GH parallela eſt AC. Ergo *f* AB ad BG erit, vt CB ad BH: & permutando *g* AB ad BC erit, vt GB ad BH; ſuntque GB, BH æquales ipſis DE, EF. Ergo, *h* vt AB ad BC, ita eſt DE ad EF. Rurſus *i* propter parallelas AB, NK erit BC ad CK, vt AC ad CN; & permutando *l* BC ad CA erit, vt KC ad CN, ſeu, *m* vt EF ad FD

a ex pr. 18, lib. 1
b prop. 3. lib. 1.
c, Corol. prop. 16. lib. 1.
d prop. 15. lib. 1.
e prop. 25. lib. 1
f prop. 2. huius.
g prop. 12 lib. 3
h prop. 7. lib. 3.
i prop. 2 huius.
l prop. 12. lib. 3
m prop. 3. lib. 3

(cùm hæ æquales ſint illis ;) cùmq; AB ad BC ſit, vt DE ad EF, & BC ad CA ſit, vt EF ad FD. Ergo, *n* ex compoſitione ordinata, erit AB ad AC, vt DE ad DF. Quod erat probandum.

n prop. 19 lib. 3

EVCL. 5. VI. PROPOSITIO V. *Si duo triangula latera proportionalia habuerint, erunt æquiangula inter ſe.* Tabula V. Fig. 35.

In triangulis ABC, DEF ſit AB ad BC, vt DE ad EF & BC ad CA ſit, vt EF ad FD, atque CA ad AB ſit, vt FD ad DE. Dico triangula eſſe æquiangula. Fiat *a* angulus HBC æqualis angulo E, & angulus HCB fiat æqualis angulo F: Efficietur *b* ergo tertius angulus H æqualis angulo D. Quare in triangulis æquiangulis BCH, EFD erit *c* HB ad BC, vt DE ad EF; ſed AB ad BC erat, vt DE ad EF. *d* Ergo HB & AB ad BC eandem rationem habent; ideoque *e* HB & AB æquales inter ſe ſunt. Eadem ratione HC æqualis erit AC; & eſt BC baſis communis. Ergo *f* anguli A & H æquales inter ſe erunt; erat autem angulus D æqualis angulo H. Ergo duo anguli A & D æquales inter ſe ſunt. Eadem ratione anguli ABC & E æquales inter ſe erunt. Quare triangula ABC, DEF æquiangula ſunt. Quod erat oſtendendum.

a prop. 24 lib. 1
b ex pr. 18. lib. 1
c prop. 4 huius.
d prop 7 lib. 3.
e prop. 4. lib. 3
f prop. 7 lib. 1.

PRO-

PROPOSITIO VI. *Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & circa æquales angulos latera fuerint proportionalia; triangula erunt ſimilia.* Tabula IV. Fig. 36. EVCL. 6. VI.

In triangulis ABC, DEF ſint anguli A & D æquales, &, vt BA ad AC, ita ſit DE ad DF. Dico triangula eſſe ſimilia. Secetur *a* AG æqualis DE & AH fiat æqualis DF, & coniungatur GH; cùmque anguli A, D æquales ſint, erunt *b* duo triangula AGH, DEF æqualia, æquiangula, & æquilatera inter ſe; Eſt verò BA ad AC, vt ED ad DF, ſeu *c* vt GA ad AH. (propter æqualitatem). Ergo *d* permutando BA ad AG erit, vt CA ad AH ideoq; GH parallela erit ipſi BC: Vnde *f* angulus B ęqualis erit angulo AGH ſed eidem angulo AGH æqualis erat angulus E. Ergo anguli B & E æquales inter ſe erunt: Erant autem prius anguli A & D æquales. Ergo *g* triangula ABC, DEF inter ſe æquiangula, & *h* ſimilia ſunt. Quod erat oſtendendum.

a prop. 3. lib. 1
b prop. 4. lib. 1
c prop. 3 lib. 3.
d prop. 12. lib. 3
e prop. 2. huius
f prop. 15. lib. 1
g ex pr. 4. lib. 4
h prop. 4 huius.

PROPOSITIO VII. *Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, ita vt homologa ſint parallela, & anguli ab eis comprehenſi ſint eiuſdem ſpeciei; erunt triangula ſimilia, & baſes pa-* EVCL. 32. VI.

rallela, vel in directum poſita. Aut ſi tria latera tribus lateribus parallela fuerint ſingula ſingulis, erunt triangula ſimilia. Tab. IV. Fig. 37.

In duobus triangulis ABC & DEF ſit primò BA ad AC, vt ED ad DF, ſintque BA & DE æquidiſtantes, pariterque æquidiſtent AC, DF; & duo anguli A & EDF ſint ambo acuti, vel ambo obtuſi. Dico triangula ABC & DEF ſimilia eſſe, & baſes BC, EF parallelas eſſe, aut in directum poſitas. Quoniam duæ rectæ AB, DE ſe mutuo ſecant in G; & duæ rectæ AC, DF ſunt parallelæ ergo *a* angulus A eſt æqualis angulo AGF & ob parallelas AB, DE erit angulus EDF æqualis eidem angulo AGF & ideo anguli A, & EDF æquales erunt inter ſe (cum ſint eiuſdem ſpeciei) & circa hos angulos æquales latera ſunt proportionalia. ergo *b* triangula ABC, DEF ſunt æquiangula; & erant homologa latera AB, DE parallela. igitur *c* baſes BC, EF parallelæ quoque ſunt, vel in directum poſitæ.

a prop. 15. lib. 1

b prop. 6 huius.

c prop. 15. lib. 1

Secundò ſint AB, DE æquidiſtantes, pariterque AC, DF æquidiſtent, nec non BC & EF ſint parallelæ. Dico rurſus triangula ABC, DEF eſſe ſimilia. nam oſtendetur vt prius quod bini quique anguli B & DEF à parallelis conprehen-

ſi

ſi æquales ſunt interſe, & erant anguli A, & EDF æquales. ergo triangula ABC, DEF ſimilia erunt, quod erat &c.

PROPOSITIO VIII. *Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, & duo anguli, homologis lateribus oppoſiti, æquales inter ſe; atque duo anguli, reliquis homologis oppoſiti, ſint eiuſdem ſpeciei: erunt triangula ſimilia inter ſe*. Tab. IV. Fig. 38. EVCL. 7. VI.

In triangulis ABC & DEF ſit AB ad AC in eadem ratione, quam ED ad DF; & ſint anguli B & E æquales, qui nimirum opponuntur homologis AC, DF, atque duo anguli C & F, oppoſiti reliquis homologis ſint eiuſdem ſpeciei, ideſt ambo ſint acuti, aut ambo obtuſi: Dico triangula ABC & DEF ſimilia eſſe. Fiat *a* angulus CAH æqualis angulo D; ſeceturque *b* AH æqualis AB, iunganturque rectæ CH & BH. Quoniam *c* æquales BA & HA habent eandem rationem ad eandem AC, eſtque ED ad DF, vt BA ad AC: Ergo AH ad *d* AC eſt, vt ED ad DF; & ſunt anguli CAH & D æquales: Igitur *e* triangula ACH & EDF ſunt æquiangula, & ideo anguli AHC & E æquales ſunt; pariterque anguli ACH & F ſunt inter ſe æquales: Erant

a prop. 24. lib. 1
b prop. 3. lib. 1
c prop 7 lib. 5.
d prop. 7 lib. 5.
e prop. 6 huius.

autem anguli A C B & F eiuſdem ſpeciei: Ergo quando angulus A CB eſt acutus, erit quoque angulus ACH acutus, & quando ille eſt obtuſus, hic quoque obtuſus erit, & propterea duo anguli ACB, & ACH, ſimul ſumpti, aut minores erunt, aut maiores duobus rectis; & ideo *f* duæ rectæ BC & CH in directum non erunt, & proinde efficietur triangulum BCH. Cumque duo anguli ABC & AHC æquales ſint inter ſe, cùm ſint æquales eidem angulo E: *g* pariterque duo anguli ABH; & AHB ſint æquales (cùm latera AB & AH æqualia facta ſint). Ergo compoſiti, vel differentiales anguli HBC & BHC æquales inter ſe erunt; & propterea *h* rectæ BC & HC æquales erunt: ſed facta fuerunt latera AB & AH æqualia, & AC eſt commune. Igitur *i* angulus BAC æqualis eſt angulo HAC; ſed eidem angulo HAC æqualis erat angulus D. Ergo anguli BAC & D æquales ſunt inter ſe. Et poſiti fuerunt anguli ABC & E æquales. Igitur *l* triangula ABC & DEF ſimilia ſunt. Quod erat oſtendendum.

f prop. 13. lib. 1

g prop. 6. lib. 1

h prop. 20. lib. 1

i prop. 7 lib. 1.

l ex pr. 4. huius

PROPOSITIO IX. *Perpendicularis ab angulo recto trianguli rectanguli ad baſim ducta, diuidit ipſum in duo triangula ſimilia toti, & inter ſe,*

EVCL. 8. VI.

ſe, & eſt media proportionalis inter baſis ſegmenta, & efficit vtrunque ſegmentum tertium proportionale totius baſis, & lateris dicto ſegmento conterminalis. Tabla IV. Figura 39.

In triangulo ABC ſit angulus BAC rectus, & ab A cadat perpendicularis AD ad baſim, ſecans eam in D. Dico triangula BAD, ACD & BCA ſimilia eſſe inter ſe, & AD mediam proportionalem inter ſegmenta BD & DC, atque CB ad BA eſſe, vt AB ad BD, pariterque tres BC, CA, DC eſſe proportionales. Quoniam in triangulis BAC, BDA angulus B eſt communis, & anguli recti BAC, BDA æquales ſunt. Ergo *a* tertius angulus C æqualis eſt angulo BAD; ideoque *b* triangula BAC, BDA ſimilia ſunt, & circa communem angulum B latera CB ad BA erunt in eadem ratione, quam AB habet ad BD. Similiter in triangulis CAB, CDA angulus C eſt communis, & duo recti CAB, CDA ſunt æquales. Ergo *c* triangula CAB, CDA ſimilia ſunt inter ſe, & BC ad CA eſt, vt AC ad CD. Tandem in triangulis BAD, ACD duo anguli BAD, & C æquales oſtenſi ſunt, & duo anguli recti BDA, ADC æquales ſunt. Ergo *d* triangula BAD, AC D ſi-

a ex pr. 18. lib. 1
b prop. 4. huius
c ex pr. 4. huius
d ex pr. 4. huius

D ſimilia quoque inter ſe ſunt, & latera circa rectos angulos æquales proportionalia ſunt: Ergo BD ad DA eſt, vt AD ad CD. Sic enim homologa ſubtendunt angulos æquales: & AD media eſt trium continuè proportionalium BD, DA, DC. Quare patet propoſitum.

EVCL. 11. 13. VI. PROPOSITIO X. *Duabus datis rectis lineis, tertiam, vel mediam proportionalem inuenire.* Tabula IV. Fig. 40.

Sint datæ duæ rectæ AB & C, ijs primò reperiri debet tertia proportionalis. Super maiori AB deſcribatur ſemicirculus ADB, & *a prop. 12. lib. 1* in eo *a* accomodetur BD æqualis C minori & à puncto D cadat *b* *b prop. 11. lib. 2* perpendicularis DE, ſecans AB in E. Dico BE eſſe tertiam proportionalem quæſitam. Coniuncta recta A *c prop. 20. lib. 2* D, *c* erit angulus ADB in ſemicirculo rectus, & ab angulo recto ducitur perpendicularis DE ad baſim *d prop. 9. huius* trianguli rectanguli ADB. Ergo *d* vt AB ad BD, ita eſt DB, ſeu C ad BE; ideoque BE eſt tertia proportionalis quæſita.

e prop. 3 lib. 1. Secundò inter AB, & C reperiri debet media proportionalis. Ex *f prop. 10. lib. 1* diametro AB *e* ſecetur BE æqualis *g prop. 20. lib. 2* C, & *f* eleuetur perpendicularis E *h prop. 9 huius.* D, compleaturque *g* triangulum rectangulum ADB: erunt, *h* vt pri-

us, tres AB, BD & BE, ſeu C, continuæ proportionales. Quare BD eſt media quæſita. Vt erat faciendum.

PROPOSITIO XI. *Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.* Tabula IV. Fig. 41. EVCL. 12. VI.

Datis tribus rectis AB, BC & AD, debet reperiri quarta, ad quam AD eandem rationem habeat, quam AB habet ad BC. Continuentur in directum AB, BC & DA efficiat quemlibet angulum cum CA, & iungatur recta BD, atque *a* CE fiat parallela ipſi BD, & ſecet rectam AD, extenſam in E. Dico DE eſſe quæſitam. Quoniam in triangulo CAE ducta eſt BD parallela baſi CE. Ergo, *b* vt AB ad BC, ita eſt AD ad DE. & hoc erat faciendum.

a *Corol. prop. 16 huius.*

b *prop. 2 huius.*

PROPOSITIO XII. *Datam rectam lineam ſecare ſecundum rationes datas:* Tabula IV. Fig. 42. EVCL. 10. VI.

Data recta linea GE ſecari debet ſecundum proportiones AB ad BC & BC ad CD. Conſtituantur in directum rectæ lineæ AB, BC, CD *a* ponaturque ipſa AD parallela rectæ GE; & à punctis A, D ad terminos G & E coniungantur rectæ lineæ AG & DE. Quæ primò ſint parallelæ inter ſe; & ducantur *b* rectæ BF, CH parallelæ ipſis AG, vel

a *Corol. prop. 10*

b *corol. prop. 16 lib. 1.*

vel DE, ſecantes GE in F & H. c ex pr. 2. huius Patet c rectam GE ſectam eſſe à parallelis in G, F, H, E in eiſdem proportionibus, ſicuti AD ſecatur.

Secundò AG & DE concurrant in K, ducanturque à punctis B, C ad K rectæ lineæ BK, CK, ſecantes GE in F & H. Et quia GF parald ex pr. 6. huius lela eſt baſi AB. Ergo d triangula AKB, & GKF ſimilia ſunt, ideoque vt BK ad FK ita eſt AB ad GF. Eadem ratione, vt eadem BK ad eandem FK, ita eſt BC ad FH; & ita etiam oſtendetur CD ad HE. e prop. 12. lib. 3 Quare e permutando, vt AB ad BC, ita erit GF ad FH, & vt BC ad CD, ita erit FH ad HE. Quare patet propoſitum.

EVCL. 33. VI. PROPOSITIO XIII. *Si duo triangula, vel duo parallelogramma, habuerint vnum angulum vni angulo æqualem, habebunt rationem compoſitam ex rationibus laterum, quæ dictos angulos comprehendunt.* Tab. IV. Fig. 43.

Sint duo triangula, vel parallelogramma ABC & DEF quorum anguli B & E æquales ſint inter ſe. Dico figuram ABC ad figuram DEF (comparando ſemper eas, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, ſcilicet triangula inter ſe, aut parallelogramma inter ſe) habere proportionem compoſitam ex ratione lateris BC

ad

ad EF, & ex ratione lateris AB ad latus DE. Fiat *a* EF ad K, vt AB ad DE, & in latere eleuato DE ſecetur *b* EH æqualis lateri eleuato AB alterius figuræ, & compleatur triangulum, vel parallelogrammum HEF. Quoniam ſi concipiantur a verticibus A & H cadere duas perpendiculares AI, HO ſuper baſes BC, EF, efficient duo triangula rectangula æquilatera interſe, cum anguli B, E ſint æquales, & latera AB, HE ſubtendentia angulos rectos æquales, ſint quoque æqualia, quare triangulorum, vel parallelogrammorum ABC & HEF altitudines AI, HO æquales erunt. Ergo *d* figura ABC ad eiuſdem ſpeciei figuram HEF eandem rationem habet, quam baſis BC ad baſim EF. Rurſus *e* figura FHE ad eiuſdem ſpeciei figuram FDE eſt vt HE ad DE, cum perpendicularis ab F ad HE ducta communis altitudo ſit figurarum; eſt verò HE, ſeu *f* ei æqualis AB ad DE, vt EF ad K. Ergo *g* figura HEF ad figuram DEF eſt, vt EF ad K. Quare *h* ex compoſitione ordinata, vt prima figura ABC ad tertiam eiuſdem ſpeciei DEF, ita eſt prima recta BC ad tertiam K. Sed BC ad K habet proportionem compoſitam ex ratione BC ad EF, & ex ratione ipſius EF ad K; eſtque EF ad K, vt AB ad DE.

a prop. 11. hu. *b prop. 3 lib. 1.* *c prop. 25. lib. 1* *d ex pr. 1. huius* *e prop. 1 huius.* *f prop. 3 lib. 3.* *g prop. 7 lib. 3.* *h prop. 19. lib. 3*

DE. Ergo *i* proportio figuræ ABC ad eiuſdem ſpeciei figuram DEF ex ijſdem proportionibus laterum BC ad EF, atque AB ad DE componitur. Quod erat oſtendendum.

i Prop. 19. lib. 3

EVCL. 14. 15. VI. PROPOSITIO XIV. *Si duo triangula, vel duo parallelogramma vnum angulum vni angulo æqualem, atque circa dictos angulos habuerint latera reciprocè proportionalia, erunt æqualia inter ſe. Et ſi fuerint æqualia, habebunt latera circa dictos angulos reciprocè proportionalia* Tab. V. Fig. 1.

Sint primò duo triangula vel duo parallelogramma ABC & DBF, quorum anguli ad B, æquales ſint inter ſe, poſitis in directum ABD & vt latus AB ad BD, ita ſit FB ad CB (ſic enim *a* figuræ ABC & DBF ſunt reciprocæ, cùm ABC contineatur à prima AB & quarta CB, atque DBF contineatur à ſecunda DB, & tertia BF quatuor rectarum proportionalium). Dico triangula ABC & DBF inter ſe, vel parallelogramma æqualia eſſe. Compleatur triangulum, & parallelogrammum CBD. Quia *b* triangulum CAB ad æquè altum triangulum CBD eſt vt baſis AB ad baſim BD, pariterque triangulum DFB ad triangulum DBC ſe habet vt baſis FB ad baſim BC; & poſita fuit

a Def. 2 huius.

b 1. lib. 6.

AB

AB ad BD, ſicut eſt FB ad BC. ergo *c* duo triangula CAB & DBF eandem proportionem habent ad idem triangulum CBD; & ideo triangula CBA & DBF æqualia ſunt interſe. Et eorum *e* dupla parallelogramma BE & BG æqualia quoq; interſe erunt. c 3.lib. 3. d 4.lib. 3. e 11 l.3

Secundo ſint triangula ABC, FBD interſe vel parallelogramma æqualia circa angulos æquales Dico AB ad BD eſſe vt FB ad BC. Si hoc verum non eſt fiat HB ad BD vt FB ad BC & compleantur figuræ BHC & BI. erit, ex prima parte huius, triangulum CHB æquale triangulo DBF, ſeu ei æquali CBA totum parti quod eſt impoſſibile. Ergo nulla alia preter AB ad BD ſe habet vt FB ad BC. Quare &c.

Corollarium I. Patet, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, eſſe parallelogrammum rectangulum, ſub extremis contentum, æquale ei, quod ſub medijs continetur. Et ſi duo parallelogramma rectangula æqualia fuerint, erit vnum contentum ab extremis, alterum verò à medijs quatuor rectarum proportionalium. Nam duo parallelogramma rectangula, quorum vnum continetur à prima, & quarta; alterum verò à ſecunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium, habent EVCL. 16. VI.

bent circa angulos rectos æquales latera reciprocè proportionalia. Ergo *f* ſunt æqualia inter ſe. Et ſi fuerint æqualia, habebunt *g* latera circa rectos angulos reciprocè proportionalia; ideoque vnum continetur à prima, & quarta, alterum verò à ſecunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium.

f prop. 14. hu.

g prop. 14. hu.

EVCL. 17.VI. *Corollarium* II. Et, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, ſub extremis contentum, æquale erit quadrato, à media deſcripto. Et ſi quadratum æquale fuerit rectangulo, erit latus quadrati medium proportionale inter duo latera rectangulum continentia. Nam tres rectæ proportionales poſſunt effici quatuor proportionales, bis poſita media proportionali; ideoque (vt in præcedenti corollario dictum eſt) rectangulum, ſub extremis contentum, æquale erit ei, quod ſub duabus medijs æqualibus continetur, ideſt *h* quadrato mediæ proportionalis. Similiter exiſtente quadrato æquale rectangulo, continebitur quadratum à duabus medijs æqualibus, ideſt ab vna media trium proportionalium.

h prop. 11. hu.

EVCL. 19. VI. PROPOSITIO XV. *Similia triangula, in duplicata ratione ſunt laterum homologorum.* Tabula V. Figura 2. Sint

Sint duo triangula ABC & DEF inter ſe ſimilia, quorum anguli B & E ſint æquales, & latera homologa AB & DE, vel BC & EF. Dico triangulum ABC ad triangulum DEF, eſſe in duplicata proportione cuiuſlibet lateris BC ad eius homologum EF. Fiat *a* EF ad G, vt AB ad DE. Quoniam propter ſimilitudinem triangulorum ABC & DEF eſt *b* AB ad DE, vt BC ad EF; ſed vt AB ad DE, ita facta eſt EF ad G. Igitur, *c* vt BC ad EF, ita eſt EF ad G. Quare *d* BC ad G duplicatam proportionem habet eius, quam habet BC ad EF, ſeu AB ad DE. Eſt verò *e* proportio trianguli ABC ad ei æquiangulum DEF, vt BC ad G (vt pote compoſita ex rationibus laterum BC ad EF & EF ad G, ſeu AB ad DE). Igitur *f* triangulum ABC ad ei ſimile triangulum DEF duplicatam proportionem habet rationis cuiuſlibet lateris homologi BC ad homologum EF. Qnod erat oſtendendum.

a prop. 11. huius
b prop. 4 huius.
c prop. 7 lib. 3.
d prop. 19. lib. 3
e prop. 13. huius
f prop. 7 lib. 3.

PROPOSITIO XVI. *Super data recta linea deſcribere Polygonum dato polygono æquiangulum, & habens circa angulos æquales latera proportionalia lateribus illius, ita vt data recta homologa ſint dato lateri Polygoni. Vocentur huiuſmodi polygona Similia inter ſe, & ſuper datas rectas he-* EVCL. 18. VI.

HB æquales ſunt, & vt DE ad EC, ita eſt BH ad HA; pariterque anguli D, & B æquales ſunt, & vt CD ad DE, ita eſt AB ad BH. Rurſus *f* propter ſimilitudinem triangulorum ECF, & HAK anguli CEF, AHK æquales ſunt, & vt CE ad EF, ita eſt AH ad HK; erat autem prius, vt DE ad EC, ita BH ad HA. Ergo *g* ex compoſitione ordinata, vt DE ad EF, ita erit BH ad HK; & ſunt anguli DEC, BHA æquales, pariterque anguli CEF, AHK æquales ſunt oſtenſi. Ergo totus angulus DEF æqualis eſt toti angulo BHK. Eadem *h* ratione angulus G æqualis erit angulo M, & FG ad GC erit, vt KM ad MA, & erit angulus AKM æqualis angulo CFG, & AK ad KM erit, vt CF ad FG; at *i* propter ſimilitudinem triangulorum circa angulos æquales EFC, HKA, latera EF ad FG & HK ad KA ſunt proportionalia. Ergo *l* ex compoſitione ordinata HK ad KM erit vt EF ad FG; ſuntque toti anguli HKM & EFG æquales inter ſe (nempe ex æqualibus compoſiti) & ſic de cæteris, ſi plures extiterint. Quare omnes anguli figuræ ABM æquales ſunt omnibus angulis figuræ CDG ſinguli ſingulis; & circa angulos æquales latera ſunt proportionalia, quorum homologa ſunt datæ rectæ lineæ AB & CD.

f prop. 4 huius.
g prop. 19. lib. 5
h prop. 4. huius
i prop. 4 huius.
l prop. 19. lib. 5

D. Quapropter factum eſt, quod fuerat propoſitum. Vocentur autem huiuſmodi polygona ABM & CDG ſimilia inter ſe, & ſuper homologa latera AB & CD ſimiliter deſcripta.

EVCL. 21. VI. *Corollariũ* Facilè deducitur, quòd quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

m prop. 16. hu. Nam, ſi eidem rectilineo CDEF fiant *m* vel ſupponantur ſimilia duo rectilinea ABM & R, ideſt eidem æquiangula, & in eadem laterum ratione; erunt quoque duo rectilinea ABM & R æquiangula inter ſe, n prop. 7. lib. 3. & *n* habentia circa angulos æquales latera proportionalia. Et propterea ſimilia erunt inter ſe.

EVCL. 20. VI. PROPOSITIO XVII. *Similia Polygona in duplicata ratione ſunt laterum homologorum*. Tabula V. Fig. 4.

Sint polygona ſimilia R & S, quorum homologa latera ſint AB, FG, a prop. 16. hu. vel BC, GH, &c. Et quia, *a* vt AB ad BC, ita eſt FG ad GH. Ergo *b* permutando, vt AB ad FG, b prop. 12. lib. 3 ita eſt BC ad GH. Eadem ratione CD ad eius homologum HK erit, vt BC ad GH; & ſic reliqua latera homologa proportionalia erunt. c prop. 19. lib. 3 Vnde *c* eorum duplicatæ proportiones eædem erunt. Dico figuram R ad

ad figuram S habere rationem duplicatam lateris AB ad eius homologum FG. Ab angulis æqualibus BAE & GFM ad angulos æquales oppoſitos coniungantur rectæ lineæ AC, AD, FH, FK, diuidentes figuras R & S in æquè multa triangula, eo quod *d* figuræ ſimiles æquè multa latera habent. Et quoniam circa angulos æquales B & G latera AB ad BC & FG ad GH in eadem ſunt ratione. *e* Ergo triangula ABC & FGH ſimilia ſunt; ideoque anguli BCA, GHF æquales ſunt, & AC ad CB eſt, vt FH ad HG; Tandem *f* triangulum ABC ad ei ſimile triangulum FGH habet duplicatam proportionem eius, quam habet latus AB, ad eius homologum FG. Eadem ratione quia circa æquales angulos E, M latera ſunt proportionalia, erit triangulum AED ad ei ſimile FMK in duplicata proportione lateris DE ad eius homologum latus KM, ſeu duplicata lateris AB ad FG. Poſtea quia anguli BCD, GHK æquales ſunt, & ablati BCA & GHF æquales oſtenſi ſunt; Ergo reſidui anguli ACD & FHK æquales ſunt; & erat AC ad CB, vt FH ad HG & BC ad CD eſt, vt GH ad HK. (propter ſimilitudinem polygonorum). Ergo *g* ex compoſitione ordinata erit AC ad CD, vt FH ad

d *prop. 16. hu.*

e *prop. 6 huius.*

f *prop. 15. hu.*

g *prop. 19. lib. 3*

h prop.6 huius. HK; & comprehendunt angulos æquales ACD & FHK; Igitur *h* triangulum ACD ſimile eſt triangulo FHK, *i* & ad eum habet pro- i prop. huius. portionem duplicatam eius, quam habet latus CD ad eius homologum HK, ſeu duplicatam lateris A Bad FG. Eadem ratione reliqua triangula, (ſi plura extiterint) erunt inter ſe in duplicata ratione l prop. 15.lib.3 lateris AB ad FG: ideoque *l* omnia triangula antecedentia, ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia triangula ſimul, ideſt figura R ad S in eadẽ ratione erit, veluti eſt vnum triangulum ABC ad vnum FCH, ſeu habebit eandem duplicatam proportionem cuiuſlibet lateris BC ad eius homologum GH. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 22.VI. PROPOSITIO XVIII. *Si latera homologa quatuor figurarum ſimilium proportionalia fuerint: rectilinea ipſa inter ſe proportionalia quoque erunt. Et ſi rectilinea ſimilia fuerint proportionalia: erunt eorum latera homologa proportionalia quoque.* Tabula V. Fig. 5.

Sint duæ figuræ R & S ſimiles inter ſe pariterque duæ figuræ X, Y ſimiles inter ſe: & ſit primò A B latus homologum figuræ R ad CD, latus homologum figuræ S, in eadem ratione, quam EF, latus homo-

mo-

mologum figuræ X, habet ad latus homologum G H figuræ Y. Dico figuram R ad S eandem rationem habere, quam X ad figuram Y. Quoniam *a* figura R ad ei ſimilem S duplicatam proportionem habet eius, quam habet latus AB ad eius homologum CD; pariterque proportio figuræ X ad ei ſimilem Y duplicata eſt eius, quam latus E F habet ad homologum GH. Sunt *b* verò proportiones duplicatæ æqualium, vel earundem proportionum AB ad C D; atque EF ad GH eædem quoque, vel æquales. Ergo *c* proportio figuræ R ad S eadem eſt, quæ figuræ X ad Y. Quod erat primum.

a pr. 17. huius.
b ex pr. 19. l. 3.
c pr. 7. l. 3.

Sit ſecundò figura R ad ei ſimilem S, vt X ad ei ſimilem figuram Y, ſintque AB, CD, EF, & GH latera homologa. Dico AB ad C D eſſe, vt EF ad GH. Quoniam proportiones figurarum R ad ei ſimilem S, & X ad ei ſimilem Y ſunt eædem, ſeu æquales, & ſunt *d* duplicatæ proportionum homologorum laterum. Ergo *e* earum ſubduplicatæ, ſcilicet rationes laterum AB ad CD, atque EF ad GH eædem quoque ſunt. Quare patet propoſitum.

d pr. 17 huius.
e ex pr. 19. l. 3.

PROPOSITIO XIX. *Parallelogramma circa æquales angulos, atque circa communem diametrum* *con-*

EVCL. 24. 26. VI. & 43. I.

conſtituta, latera in directum habentia, erunt inter ſe ſimilia. Et ſi fuerint ſimilia inter ſe, & habeant latera homologa in directum poſita, conſiſtent circa communem diametrum. Atque duo parallelogramma complementi æqualia erunt inter ſe. Tab. V. Fig. 6. 7.

Duo paralellogramma AC & EF conſtituta ſint circa communem diametrum DBG, circa angulos æquales ABC & EBF, atque habeant latera homologa AB, BE in directum poſita, pariterque latera CB, BF in directum. Dico primum parallelogramma AC & EF ſimilia eſſe. Quoniam recta EG parallela ipſi DA baſi trianguli DBA, ſecat
a ex pr. 6. hu. duo eius latera: igitur *a* triangulum ABD ſimile eſt triangulo EB G: & propterea latera homologa AB ad BE atque DA ad EG, nec non DB ad BG in eadem ratione erunt. Simili modo quia FG parallela eſt DC, baſi trianguli CDB, erunt triangula CDB, GBF ſimilia inter ſe, & vt prius latera homologa CB ad BF, atque DC ad GF in eadem ratione erunt eiuſdem
b pr. 7. lib. 3. BD ad eandem BG, Ideoque *b* A B ad BE, AD ad EG, DC ad GF, atque CB ad BF in eadem ratione
c prop. 12. l. 3. erunt. Quare permutando *c* AB ad BC erit vt EB ad BF circa angulos æquales ABC, EBF; pariterque

d cir-

d circa angulos æquales alternos, aut externum, & internum A & E, erit BA ad AD, vt BE ad EG; & ſic reliqua omnia latera oppoſita. Quapropter *e* parallelogramma AC & EF ſimilia inter ſe erunt. *d prop. 15. l. 1.* *e prop. 16. hu.*

Secundò ſint parallelogramma AC, EF ſimilia, & habeant latera homologa AB, BE in directum poſita, & ſic latera CB & BF in directum; & ducantur diametri D B & BG. Dico DBG vnam rectam eſſe. Quoniam in duobus triangulis DCB, BEG parallela ſunt latera DC & BE, cùm AB, BE in directum ſint poſitæ, & *f* AB parallela ſit oppoſito lateri DC in parallelogrammo CA. Eadem ratione parallela ſunt latera CB & EG; ſuntque *g* anguli DCB & BEG æquales, propter ſimilitudinem figurarum. Ergo *h* baſes DB, BG parallelæ ſunt inter ſe; & *i* ſe tangunt in B. Ergo in directum ſunt poſitæ. *f prop. 26. l. 1.* *g prop. 17. hu.* *h prop. 7. hu.* *i ex pr. 17. lib. 1*

Tertiò Dico parallelogramma complementi NB & BO æqualia eſſe inter ſe. Quoniam *l* circa angulos æquales ad verticem EBC & FBA latera ſunt reciprocè proportionalia: Nam vt AB ad BE, ita oſtenſa eſt CB ad BF. Ergo *m* parallelogramma NB & BO æqualia ſunt. Quæ erant oſtendenda. *l Cor. pr 5. lib. 1.* *m prop. 14. hu.*

EVCL. 44.45I. PROPOSITIO XX. *Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale rectilineo dato, in dato angulo*. Tab V. Fig. 8.

Sit figura rectilinea RS, & quælibet recta data AB, angulus datus C. Debet ad rectam AB applicari parallelogrammum æquale rectilineo RS in angulo C. Diſtribuatur rectilineum in triangula R & S, & fiat *a* parallelogrammum DEF æquale triangulo R in angulo E æquali ipſi C, pariterque fiat parallelogrammum GL æquale triangulo S, cuius angulus H æqualis ſit eidem angulo C: poſtea *b* fiat angulus BAK æqualis angulo C, & *c* vt BA ad DE, ita fiat FE ad AM, & compleatur parallelogrammum AN: ſimiliter fiat, vt NM ad GH, ita LH ad MK, & compleatur parallelogrammum MO. Quoniam *d* duo parallelogramma AN, & DF circa angulos æquales A & E habent latera reciprocè proportionalia; igitur æqualia ſunt inter ſe; eſt verò triangulum R factum æquale parallelogrammo DF. Igitur parallelogrammum AN æquale eſt triangulo R. Rurſus *e* quia propter parallelas AB, MN eſt angulus externus KMN æqualis interno, & oppoſito angulo A, eſtque angulus H æqualis angulo C, ſiue A. Igitur duo anguli H & KMN æquales

a prop. 33. lib. 1

b prop. 24. l. 1.
c pr. 11. huius.

d pr. 14 huius.

e prop. 15. lib. 1

ſunt

ſunt inter ſe, ſuntque circa hos angulos æquales latera reciprocè proportionalia. Igitur *f* parallelogrammum GL, ſeu ei æquale triangulum S erit æquale parallelogrammo M O. Et propterea duo parallelogramma A N & M O, ideſt parallelogrammum K A B O æquale erit duobus triangulis R & S, ſiue rectilineo dato: eſtque applicatum ad rectam AB in angulo æquali ipſi dato C. Factum eſt ergo Problema. *f pr. 14. huius.*

PROPOSITIO XXI. ***Datis duobus polygonis tertium deſcribere, quod ſimile ſit vni, & æquale reliquo datorum.*** Tab. V. Fig. 9. EVCL. 25. VI. & 14. II.

Sint datæ duæ figuræ rectilineæ R & S. Debet conſtrui figura, quæ æqualis ſit figuræ S, at ſimilis ſit figuræ R. Super quolibet latere AB figuræ R fiat *a* parallelogrammum A D æquale ſpatio R in quolibet angulo BAC; & producta AB in E ſuper BD in angulo EBD, qui *b* æqualis erit interno & oppoſito B A C, fiat *c* parallelogrammum B F æquale ſpatio S. Patet parallelogramma AD & BF eſſe inter eaſdem parallelas AE CF. Poſtea inter duas rectas AB & BE *d* fiat media proportionalis GH, ſuper quam fiat *e* figura X ſimilis ipſi R, ita vt GH ſit latus homologum ipſi AB. Quoniam R & X ſunt fi- *a pr. 10 huius.* *b pr. 15 huius.* *c pr. 20 huius.* *d pr. 10. huius.* *e Prop. 16. huius.*

f pr. 17. huius. guræ ſimiles. *f* habebit R ad X duplicatam rationem eius, quam habet latus AB ad eius homologum GH; g pr. 19. lib. 3. ſed *g* AB ad BE duplicatam rationem habet eius, quam habet AB ad mediam proportionalem GH. Ergo, h pr. 7. lib. 3. *h* vt AB ad BE, ita eſt figura R ad figuram X; i prop. 1. huius. ſed *i* parallelogrammum AD ad parallelogrammum BF eſt, vt baſis AB ad baſim BE (cùm ſint inter eaſdem parallelas) l prop. 7 lib. 3. Ergo *l* figura R ad figuram X eſt, vt parallelogrammum AD ad parallelogrammum BF; eſt verò parallelogrammum AD æquale figuræ R, & parallelogrammum BF m prop. 3. lib. 3. æquale ſpatio S. *m* Ergo figura R ad figuram X eſt, vt figura R ad figuram S; ideoque figura *n* X n prop. 4 lib. 3. æqualis eſt ſpatio S, & facta fuit figura X ſimilis ipſi R. Quod erat faciendum.

EVCL. 35. 36. 37. III. PROPOSITIO XXII. *Si in circulo ductæ fuerint duæ rectæ lineæ, ſe ſecantes: parallelogrammum rectangulum, comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale erit ei, quòd ſub ſegmentis alterius continetur, rectangulo. Et ſi rectangula ſub ſegmentis duarum rectarum ſe ſecantium, æqualia fuerint: eiuſdem circuli peripheria per quatuor terminos illarum tranſibit.* Tab. V. Fig. 10. 11. 12. 13.

In circulo ABC duæ rectæ lineæ du-

ductæ AEB & DEC ſe ſecent in E (ſiue ambæ ſecent circuli peripheriam in duobus punctis, vt in prima & ſecunda figura, ſiue vna AEB eam ſecet in duobus punctis A & B, altera verò recta DEC tangat eandem peripheriam in vno pũcto à ſignis D & C expreſſo, vt in tertia figura, ſiue ambæ circulum tangant, vt in quarta figura.) Dico parallelogrammum rectangulum contentum ſub vnius ſegmentis AE & EB, æquale eſſe rectangulo, ſub alterius ſegmentis DE & EC contento. Coniungantur rectæ AC, DB. Quoniam duo anguli EDB & EAC, æquales ſunt, quia aut *a* ſunt in eodem ſegmento CADB, vt in prima, & ſecunda figura, aut *b* angulus E D B continetur à tangente ED, & ſecante BD, reliquus verò angulus EAC in alterno ſegmento BFC exiſtit, vt in tertia figura, aut *c* ambo anguli à tangentibus, & eadem ſecante contenti, æquales ſunt ei, qui in alterno ſegmento BFC effici poteſt, vt in quarta figura; ſuntque anguli *d* AEC & DEB æquales ad verticem, vel vnus, & idem. *e* Ergo duo triangula AEC & DEB ſimilia ſunt; & ideo, vt AE ad EC, ita eſt DE ad EB. Quapropter *f* parallelogrammum rectãgulum, ſub prima & quarta proportionalium contentum, ideſt rectangulum

a prop. 14. l. 2.
b pr. 24. lib. 2.
c pr. 24. lib. 2.
d corol. prop. 5. lib. 1.
e ex pr. 4. huius.
f ex pr. 14 hu.

gulum AEB, æquale erit rectangugulo DEC, quod à ſecunda & tertia continetur.

Secundò duæ rectæ AEB & DE C ſe ſecantes in E, efficiant rectangula AEB & DEC æqualia inter ſe; & per tria puncta A, C, B, ducatur *g* circuli peripheria. Dico eam transſire per punctum D. Si enim hoc verum non eſt, tranſeat per H citra, vel vltra punctum D. Ergo *h* rectangulum HEC æquale erit rectangulo AEB; ſed erat rectangulum DEC æquale eidem rectangulo AEB. Quare rectangula HEC & DEC æqualia ſunt inter ſe, pars, & totum; quod eſt impoſſibile. Non ergo circuli peripheria ACB tranſit per punctum H. Quapropter per puncta A, B, C, D tranſibit. Vt erat propoſitum.

g ex pr. 1. lib. 3.

h ex prima parte huius

PROPOSITIO XXIII. ***Datis duabus rectis lineis, in altera earum punctum intra, aut extra reperire, quod efficiat duo ſegmenta, inter quæ reliqua ſit media proportionalis. Oportet autem medietatem rectæ lineæ, intra quam punctum ſignari debet, non minorem eſſe reliqua.*** Tab. V. Fig. 14.

Sint duæ rectæ lineæ AB & C debet reperiri punctum intra rectā lineam AB, vt in primo caſu, vel extra eam in directum vt in ſecundo

do, ita vt recta linea C ſit media
proportionalis inter facta ſegmen-
ta; ſed in primo caſu oportet, vt
ſemiſſis ipſius AB non minor ſit,
quam C. Super diametro AB
fiat circulus AEB, cuius centrum
G; & *a* à termino B ducatur BD *b prop.*
perpendicularis ad AB, ſeceturque *10. lib. 1*
b BD æqualis ipſi C. Poſtea à ter- *b prop. 3. lib. 1*
mino D (in primo caſu) ducatur
c recta linea DE parallela ipſi AB, *c Corol.*
quæ non cadet extra circulum, eo *prop. 16. lib. 1*
quod ſemiſſis ipſius AB, id eſt radius
ſeu altitudo ſemicirculi AEB ſup-
ponitur æqualis, aut maior quam
C, ſeu quam perpendicularis BD;
& propterea DE tanget, aut ſeca-
bit circulum in E: at in ſecundo
caſu coniungatur recta DG ad cen-
trum circuli, ſecans peripheriam
eius in E. Deinde *d* ſecetur recta *d pr. 3.*
BH æqualis ipſi DE, coniungantur- *lib. 1.*
que rectæ EH, DH. Quoniam
in duobus triangulis EDH & BH
D facta ſunt duo latera BH & DE
æqualia, atque latus HD eſt com-
mune, & anguli comprehenſi ED
H & BHD æquales ſunt inter ſe
(eo quod in primo caſu *e* ſunt al- *e prop.*
terni in parallelis DE & BA; in *15. lib. 1*
ſecundo verò caſu *f* ſunt ad baſim *f Prop.*
trianguli iſoſcelij DGH; propte- *6. lib. 1.*
rea quod radijs æqualibus GB, GE
adduntur æquales BH, ED.) Igitur
g baſis EH æqualis eſt BD, ſeu C; *g prop. 4. lib.*
pa-

pariterque angulus DEH æqualis eſt
h prop. 12. lib. 1 angulo DBH recto; ideoque *h* HE
perpendicularis eſt ad DE; & propterea in primo caſu *i* EH ſecat per-
i prop. 15. lib. 1 pendiculariter quoque diametrum
l ex pr. BA æquidiſtantem ipſi DE; at in ſe-
21. lib. 3 cundo caſu *l* HE contingit circu-
m prop. lum in puncto E. Igitur *m* paralle-
22. hu. logrammum rectangulum AHB æquale eſt quadrato rectæ lineæ HE;
n ex pr. & ideo *n* HE, ſeu ei æqualis C me-
24. hu. dia proportionalis erit inter ſegmenta AH & HB. Vt propoſitum fuerat.

EVCL. 28. 29. *VI.* PROPOSITIO XXIV. *Ad datam rectam lineam dato rectilineo ſpatio æquale parallelogrammum applicare deficiens, aut excedens parallelogrammo, quod ſimile ſit alteri dato: oportet autem quando parallelogrammum deficiens applicandum eſt, datum ſpatium maius non eſſe parallelogrammo, ſuper dimidia deſcripto, quod ſimile ſit parallelogrammo dato.* Tabula V. Figura 15.

Sit datum quodlibet ſpatium rectilineum C & parallelogrammum D, atque recta linea AB; & ſuper
a prop. eius medietate EB fiat *a* parallelo-
16. hu. grammum EF ſimile ipſi D. Debet ad rectam AB applicari parallelogrammum æquale ſpatio C, & deficiens (in primo caſu), aut excedens (in ſecundo caſu) parallelo-

gram

grammo, quod ſimile ſit ipſi D: ſed neceſſe eſt, in primo caſu, vt ſpatium C non ſit maius parallelogrammo EF. Fiat *b* parallelogrammum R ſimile ipſi EF, & æquale ſpatio C, ſitque IS eius latus homologum ipſi EB: Et quia in primo caſu, ponitur ſpatium C, ſeu ei æquale parallelogrammum R non maius parallelogrammo EF. *c* Ergo latus IS æquale, aut minus erit latere ei homologo EB, ſcilicet medietate ipſius AB. Quare recta AB *d* ſecari poteſt in H, ſicuti in ſecundo caſu *e* produci poteſt, vt IS media proportionalis ſit inter AH & HB. Fiat *f* ſuper HB parallelogrãmum HO ſimile & ſimiliter poſitum ſpatio R ſiue EF; & compleatur parallelogrammum NA. Et quia ſpatium HO ad ſpatium R ei ſimile habet duplicatam rationem lateris HB ad IS, ſcilicet ſpatium HO ad R *g* ſeu ad C ſe habet vt BH ad HA, ſeu *h* vt parallelogrammum HO ad parallelogrammum NA. Ergo *i* ſpatium C æquale eſt parallelogrammo NA; quod applicatum eſt ad AB atque deficit in primo caſu, & excedit in ſecundo in figura HO, quæ ſimilis eſt ipſi EF, ſeu *l* parallelogrammo dato D. Quod erat faciendum.

b prop. 21. hu.
c ex pr. 17. hu.
d ex pr. 23. hu.
e ex pr. 23. hu.
f prop. 16. hu.
g prop. 17. hu.
h prop. 1. huius.
i prop. 4 lib. 3.
l cor. pr. 16. hu.

ROPOSITIO XXV. *Propoſitam rectam lineam terminatam ſecare in*

EVCL. 11. II. & 30. VI.

in duo ſegmenta, quorum vnum medium proportionale ſit inter totam, & reliquum ſegmentum. Vocetur autem recta, ſic ſecta, ſecundum extremam, & mediam rationem diuiſa. Tabula V. Fig. 16.

Data recta AB ſecari debet, vt proponitur. *a* producatur recta AB in C, vt ipſa AB ſit media proportionalis inter productam AC, eiuſque productionem BC; ſeceturque *b* BD æqualis BC: erit CA ad AB vt AB ad BC, ſeu *c* ad ei æqualem BD: & diuidendo *d* CB, ſeu *e* ei æqualis DB ad BA erit, vt AD ad DB; & propterea ſegmentum BD erit medium proportionale inter totam AB reliquumque eius ſegmentum AD. Quod erat faciendum. Vocetur recta AB hac ratione ſecta in D, diuiſa ſecundum mediam & extremam rationem.

a prop. 23. hu. *b prop. 3. lib. 1.* *c Prop. 3. lib. 3.* *d prop. 13. lib. 3* *e prop. 3 lib. 3.*

Pappi 54. V. PROPOSITIO XXVI. *Si duarum rectarum linearum, in eadem ratione diuiſarum, vna ſit ſecta extrema & media ratione; altera quoque ſimiliter ſecta erit: Et ſi duæ rectæ, ſingulæ ſectæ fuerint extrema, & media ratione ambæ in eiſdem rationibus ſecta erunt.* Tabla V. Fig. 17.

Sit AB ſecta in E æxtrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum AE; & vt BA ad AE, ita ſit DC ad CF. Dico CD in F ſectam

quo-

quoque eſſe extrema, & media ratione. Quoniam BA ad AE eſt, vt DC ad CF: Ergo diuidendo *a* BE ad EA, eſt vt DF ad FC; & inuertendo *b* erit AE ad EB, vt CF ad FD. Et quia AB ſecta eſt in E extrema, & media ratione: Ergo *c* AE ad EB eſt, vt BA ad AE; ſed vt BA ad AE, ita erat DC ad CF. *d* Ergo DC ad CF eſt, vt AE ad EB; fuit autem, vt AE ad EB, ita CF ad FD: Ergo, *e* vt DC ad CF, ita eſt CF, ad FD. ideoque CD in F ſecatur extrema, & media ratione.

a prop. 13. lib. 3.
b prop. 9 lib. 3.
c prop. 25. hu.
d prop. 7. lib. 3.
e prop. 7. lib. 3.

Secundò ſint ſectæ duæ rectæ AB & CD ambæ extrema, & media ratione in E & F. Dico eas ſecari proportionaliter. Si hoc verum non eſt, ſit CG (maior, vel minor, quam DC) ad CF, vt BA ad AE. Ergo, vt dictum *f* eſt, ſicuti AB in E, ita erit GC in F ſecta extrema, & media ratione; ideoque *g* rectangulum FGC æquale erit quadrato mediæ proportionalis CF; ſed ex hypotheſi CF erat media proportionalis inter FD, & CD. Ergo *h* parallelogrammum rectangulum FDC æquale eſt quadrato eiuſdem CF. Quare parallerogramma rectangula FGC & FDC æqualia inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo aliqua GC maior, vel minor, quàm

f prim. par. hu.
g ex pr. 14. hu.
h ex pr. 14. hu.

DC

DC habere poteſt ad CF eandem rationem, quam BA ad AE, ideoque ipſamet DC ad CF erit, vt BA ad AE. Et diuidendo *i* BE ad EA erit, vt DF ad FC, & *l* inuertendo AE ad EB erit, vt CF ad FD. Quare patet propoſitum.

i prop. 13. lib. 3
l prop. 9 lib. 3.

EVCL. 5. XIII.

Corollarium Ex his duabus propoſitionibus deducitur, quòd, ſi alicui rectæ lineæ ſecundum extremam, & mediam rationem diuiſæ, addatur recta æqualis maiori ſegmento: compoſita linea ſecundum extremam, & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ à principio recta linea. nam in propoſitione 25. ſecta fuit AB in D extrema, & media ratione, & addita BC æquali maiori ſegmento BD, erat BD, ſeu ei æqualis CB ad BA vt AD ad DB: vnde tam AB in D, quàm CA in B in eadem ratione ſecantur; & propterea ex hac 26. propoſitione recta CA in B extrema, & media ratione ſecabitur, ſicuti AB in D extrema, & media ratione ſecta erat.

Finis Libri quarti.

LI-

LIBER V.

EVCL. lib. IV. II. & reſid. VI

DEFINITIONES.

FIGVRA rectilinea inſcribi in circulo dicitur, cùm ſinguli eius anguli tangunt circuli peripheriam. Et circumſcribi dicitur circulo, cùm ſingula figuræ latera tangunt circuli peripheriam. I.

E contra circulus inſcribi dicitur in figura rectilinea, cùm circuli peripheria tangit ſingula latera figuræ: Et circumſcribi dicitur, tùm circuli peripheria tangit omnes angulos figuræ. Tabula V. Fig. 18. II.

AXIOMA.

Si à terminis rectæ lineæ, ſubtendentis arcum alicuius circuli, ducantur duæ rectæ lineæ, concurrentes extra circulum, & tota extra ipſum poſitæ. vel ſimili modo ducatur vna curua linea: erunt lineæ comprahendentes maiores peripheria comprehenſa; ſubtenſa verò recta linea minor erit eadem peripheria, ſeu curua. Tabula V. Fig. 19. Archi. de Sphera & cyl lib. I

Sit enimcirculi peripheria AEC, ſubtenſa verò recta AC, & curua ABC, atq; duæ rectæ tangentes circulum AD, CD, concurrentes in D & extra curuam cadentes. Manifeſtum

feſtum eſt rectam AC, minorem eſſe peripheria AEC, nec non curua ABC, cum recta ſit omnium breuiſſima: & AEC minorem eſſe quàm ABC & ABC minorem eſſe quam ADC. eo quod AEC minùs recedit à rectitudine, quàm ABC, & hæc minùs, quàm ADC.

PROPOSITIO I. *Ad datam rectam lineam, atque ad eius punctum, angulum deſcribere, qui quinta pars ſit quatuor rectorum*. T. V. F. 20.

Ad datam rectam AB, atque ad eius punctum B angulus effici debet, qui ſit quinta pars quatuor recto-
a prop. 25. lib. 4 rum. Secetur *a* recta linea AB extrema, & media ratione in C, cuius maius ſegmentum ſit AC; & centro A, interuallo AB circulus BD
b prop. 12. lib. 2 deſcribatur, in quò applicetur, *b* recta BD æqualis maiori ſegmento AC. Dico angulum ABD eſſe quæſitum. Iungantur rectæ AD &
c prop. 25. lib. 4 CD. Quoniam *c* tres rectæ BA, AC & CB proportionales ſunt, & eſt BD æqualis AC, atque radius AD æqualis AB. Ergo in triangulis A
d prop. 6. lib. 1. BD & DBC circa *d* æquales angulos ADB & B ſubtenſos à radijs æqualibus, eſt AB, ſeu ei æqualis A
e prop. 6. lib. 4. D ad DB, vt DB ad BC. Quare *e* angulus CDB æqualis eſt angulo
f prop. 3 lib. 4. A; & eſt AC ad CB, vt BA ad AC, ſeu vt AD ad DB: Ergo *f* angulus

gulus ADB, ſeu ei æqualis B, duplus eſt anguli CDB, ſeu anguli A. Ergo qualium partium angulus A eſt vna, erit B duæ partes, & D pariter duæ. Quare anguli A, B & D, ſimul ſumpti, (qui *g* æquales ſunt duobus angulis rectis) æquales erunt quinque angulis, quorum quilibet æqualis eſt ipſi A; ideoque angulus A quinta pars erit duorum rectorum. Sed quam proportionem duplam habet angulus B ad angulum A, eandem habent quatuor recti ad duos rectos: Et permutando *h* angulus B ad quatuor rectos erit, vt angulus A ad duos rectos; ſed angulus A quinta pars eſt duorum rectorum. Ergo *i* angulus B quinta pars eſt quatuor rectorum, Vt erat propoſitum.

g prop. 18. lib. 1

h prop. 12. lib. 3

i Def. 8 lib. 3.

Corollarium Hinc patet, qua ratione triangulum Iſoſcelium conſtitui debeat, in quo quilibet angulorum ad baſim duplus ſit anguli verticalis.

EVCL. 10. IV.

PROPOSITIO II. ***Angulum reperire, qui ſit quintadecima pars quatuor rectorum.*** Tabula V. Fig. 21.

Effici debet angulus, qui ſit vna pars, earum, qualium quatuor recti in quindecim partes æquales diuiduntur. Fiat *a* angulus ABC duplus vnius anguli trianguli æquilateri. Et quia, vt duo recti ad quatuor

a prop. 24 libri

tuor

tuor rectos, ita eſt angulus vnus trianguli æquilateri ad angulum A BC vtræque enim rationes ſunt, ſubduplæ; & permutando, *b* vt duo recti ad vnum angulum trianguli æquilateri, ita ſunt quatuor recti ad angulum ABC: eſt *c* vero vnus angulus trianguli æquilateri tertia pars duorum rectorum: Ergo angulus A BC tertia pars eſt quatuor rectorum. Fiat rurſus angulus CBD tertia pars quatuor rectorum, ideſt *d* æqualis ipſi ABC. Et quia *e* anguli omnes ABC, CBD & DBA circa punctum B æquales ſunt quatuor rectis, ſuntque duo anguli ABC, C BD duæ tertiæ partes quatuor rectorum, ergo reliquus angulus ABD tertia pars quoque erit quatuor rectorum. Poſtea fiant *f* anguli ABE, EBF, FBG, GBH qui ſinguli æquales ſint quintæ parti quatuor rectorum: erit, vt antea, quintus angulus HBA æqualis prioribus, & quinta pars quatuor rectorum. Et quoniam angulus ABF æqualis eſt angulo ABG, cum vterque æqualis ſit duabus quintis quatuor rectorum: Suntque duo anguli ABC & ABD æquales quoque. Ergo reſidui anguli CBF & DBG æquales erunt. Deinde quia ab æqualibus angulis ABC & CBD auferuntur æquales anguli ABE & FBG: Ergo reſiduus angulus EBC æqualis eſt duobus reſiduis

b prop. 12. lib. 3

c ex pr. 18. lib. 1

d prop. 24. lib. 1

e ex pr. 13. lib. 1

f prop. 1 huius.

ſiduis

ſidui angulis CBF & G B D; ſunt verò oſtenſi anguli CBF & GBD æquales inter ſe. Ergo angulus EB C duplus eſt anguli CBF; & totus angulus EBF triplus eſt anguli CB F. Eadem ratione tam angulus A BE, quàm ABH, quàm HBG, & quàm FBG æqualis eſt triplo anguli CBF. Quare omnes anguli FBE, EBA, ABH, HBG, GBF, ſimul ſumpti, quinquies ſummam trium angulorum æqualium vni CBF, ideſt decies & quinquies angulum CBF continebunt. Et propterea angulus CBF, decies & quinquies ſumptus, æquatur angulis omnibus circa punctum B, ideſt *g* quatuor rectis. Quod erat faciendum. *g ex pr. 13. lib. 1.*

PROPOSITIO III. *Intra datum circulum triangulum dato triangulo æquiangulum, & polygonum æquilaterum, & æquiangulum trium, quatuor, quinque, & quindecim laterum, & quodlibet aliud, quod ex continua duplicatione laterum eorundem polygonorum conſurgit, inſcribere. Vocentur autem huiuſmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ figuræ* Regulares. Tab. V. Fig. 22. 23. 24. 25 26. EVCL. 2. 6. 11. 15. 16. IV.

In circulo BCD, cuius radius A B inſcribendæ ſunt figuræ imperatæ. Et primò triangulum, quod ſit æquiangulum dato triangulo ZXY.

Abſcin-

dij AB, AC, AD, &c. vſque ad circuli peripheriam in punctis B,C, D, &c. & coniungantur rectæ BC, CD, DE, &c. quouſque compleantur figuræ. Oſtendendum eſt omnia prædicta polygona eſſe æquilatera, & æquiangula. Quoniam omnes anguli BAC, CAD, &c. verticales ad centrum A æquales facti ſunt, & radij omnes ſunt pariter æquales. Ergo *g* omnia triangula iſoſcelia BAC, CAD, DAE, &c. ſunt ſimiliter æqualia, aquè alta, & æquiangula inter ſe, & eorum baſes BC, CD, DE, &c. æquales erunt. Quare figura BCDEF &c. æquilatera erit. Et quia anguli omnes ad baſes iſoſcelium, vt ſunt BCA, ACD, CDA, ADE, &c. æquales oſtenſi ſunt: Ergo bini binis æquales erunt; ideoque angulus BCD æqualis erit angulo CDE, & ſic reliqui omnes. Quare quælibet figura BCDE &c. circulo inſcripta, æquiangula eſt, & æquilatera.

g prop.4 lib. 1.

Poſtea patet, quod ſi in qualibet ex dictis figuris diuidantur omnes *h* anguli ad centrum bifariam, & rurſus bifariam, & ſic vlterius, atque in peripheria circuli rectæ, ſubtendentes æquales angulos ad centrum, ducantur quouſque figuræ compleantur, deſcriptæ erunt aliæ figuræ æquilateræ, & æquiangulæ; & ſic in triangulo æquilatero ex bibartita-

h prop.8 lib. 1.

petuntur; & à centro F ducantur *b* perpendiculares FO, FR, FS, &c. ſuper latera AB, BC, &c. quæ ſecent peripheriam in punctis O, R, S, &c. & per hæc puncta ducantur *c* circulum tangentes HG, GK, &c. quouſque compleantur figuræ circunſcriptæ; cumque eiſdem tangentibus *d* perpendiculares ſint ijdem radij, *e* ergo AB & GH parallelæ erunt, pariterque BC, HK, & ſic reliquæ æquidiſtabunt: ideoque *f* efficient angulum GHK æqualem angulo ABC. Et ſimiliter angulus G oſtendetur æqualis angulo A, & angulus K æqualis oſtendetur angulo C & ſic reliqui. Quare triangulum, circunſcriptum circulo GHK, æquiangulum eſt triangulo dato Z XY, & figura circunſcripta GHKN æquiangula eſt; cùm eius anguli æquales ſint angulis figuræ regularis inſcriptæ ABCE.

b prop. 11. lib. 1

c ex pr. 21. lib. 2

d prop. 23. lib. 2

e prop. 16. lib. 1

f ex pr. 7. lib. 4

Poſtea in polygonis, ductis rectis FG & FA, quia in triangulis GOF & VGF duo *g* latera GO & GV æqualia ſunt, cùm ſint latera æqualium quadratorum ex tangentibus, ab eodem puncto ductis, & radij FO, FV, inter ſe æquales, atque latus FG commune: Ergo *h* anguli OGF & VGF ſunt inter ſe æquales; Sed *i* recta FA diuidit quoque bifariam figuræ inſcriptæ angulum BAE, & eſt angulus BAE æqualis oſtenſus

g ex pr. 22. lib. 4

h prop. 7. lib. 1.

i prop. 3 huius.

angulo HGN: Ergo eorum ſemiſſes, ſcilicet anguli HGF & BAF æquales ſunt; eſtque HG parallela ipſi BA; Ergo *l* GF parallela eſt ipſi AF, & conueniunt in F: *m* Ergo vna, & eadem recta linea eſt FAG, ex centro per angulos vtriuſque figuræ tranſiens. Eadem ratione rectæ lineæ erunt FBH, FCK, FDM & FEN, quæ à centro per angulos vtriuſque figuræ extenduntur. Deinde quia BA parallela eſt HG, baſi trianguli HFG: Ergo *n* AB ad GH eſt, vt BF ad FH. Eadem ratione BC ad HK eſt, vt eadem BF ad eandem FH; ideoque, *o* vt BA ad HG, ita eſt BC ad HK: & ſunt antecedentes BA & BC æquales in polygono inſcripto regulari. Ergo *p* & conſequentes HG & HK æquales ſunt inter ſe. Eadem ratione reliqua latera KM, MN, NG æqualia erunt inter ſe, & ipſis GH, HK. Quare figura GHKN æquilatera eſt; ſed prius erat æquiangula. Ergo *q* figura circunſcripta GHKN regularis eſt. Quod erat faciendum.

l ex pr. 7. lib. 4
m ex prop. 17. lib. 1.
n ex pr. 6. lib. 4.
o pr. 7. lib. 3.
p ex pr. 16. lib. 3
q prop. 3. huius

Corollarium Patet, quod, ſi omnes anguli ad centrum circuli, vel eius peripheria diſtributa fuerit in quotlibet partes æquales ternario plures, & rectæ puncta diuiſionum coniungentes, intra circulum du-

can-

cantur, nec non rectæ circulum tangentes parallelæ rectis coniunctis producantur: deſcripta erunt duo polygona regularia parium laterum ſimilia inter ſe, alterum circunſcriptum, alterum verò circulo inſcriptum. Eritque circunſcriptum ad inſcriptum, vt quadratum radij vnius ad quadratum radij alterius; & vt quadratum rectæ lineæ ex centro, vſque ad angulum circunſcriptæ figuræ ad quadratum radij circuli. Ductæ enim fuerunt in hac propoſitione tangentes GH, HK, &c. parallelæ lateribus AB, BC &c. & oſtenſa fuit figura GHM æquiangula figuræ ABCD, & latera circa angulos æquales in eadem proportione æqualitatis; & rurſus latus HG ad AB fuit, vt GF ad circuli radium FA, vel vt radius OF ad radium FP. Et propterea *r* ſuper his lateribus proportionalibus erunt figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ GHKM ad ABCD, in eadem ratione, quam habet quadratum ex FG ad quadratum radij FA, vel vt quadratum ex OF ad quadratum ex FP. Vocentur autem huiuſmodi figuræ (breuitatis gratia) *Circulo adſcriptæ*.

r prop. 18. lib. 4

PROPOSITIO V. *Circa quodlibet polygonum regulare circulum deſcribere*. Tabula V. Fig. 29.

EVCL. 9.14.IV.

 Sit

Sit quodlibet polygonum regulare ABD. Debet circa ipſum deſcribi circulus. Ducta recta AC, circa triangulum ABC deſcribatur *a* circulus, cuius centrum O; & coniungatur recta linea BD. Et quia in duobus triangulis ABC, & DCB duo latera AB, & DC æqualia ſunt, cùm ſint latera regularis figuræ, & latus BC eſt commune, atque anguli ABC & DCB æquales ſunt inter ſe: Ergo *b* anguli BAC & CDB æquales ſunt inter ſe, & inſiſtunt ſuper eadem recta BC, ad eaſdem partes conſtituti: Ergo *c* circunferentia circuli, cuius centrum O, per tria puncta A, B & C ducta, tranſibit quoque per quartum punctum D. Eadem ratione peripheria circuli, cuius centrum O, quæ tranſit per tria puncta B, C & D, tranſibit quoque per punctum E, & ſic per reliqua. Quare *d* circulus, radio OA deſcriptus, circunſcriptus erit polygono ABCDE. Quod erat faciendum.

a ex conſtruct. prop. 1. lib. 2.

b prop. 4. lib. 1.

c prop. 14. lib. 2

d Def. 2. huius

EVCL. 4 8. 13. IV.

PROPOSITIO VI. *Intra triangulum, & intra quodlibet polygonum regulare circulum inſcribere.* Tabula V. Fig. 30. 31.

Sit quodlibet triangulum, aut polygonum regulare ABC. Debet inſcribi circulus in his figuris. Et primò in triangulo ſecentur *a* angu-

a prop. 8. lib. 1

li

li A & B bifariam à rectis AD & BD, quæ concurrent intra triangulum, vt in D, *b* à quo cadant perpendiculares DE, DF & DG ſuper trianguli latera. Quoniam in triangulis DBF & DBE duo anguli ad B æquales facti ſunt, & duo anguli ad E & F ſunt recti æquales quoque, atque latus DB eſt commune, & oppoſitum rectis angulis: Ergo *c* DF æqualis eſt ipſi DE. Eadem ratione in triangulis DEA & DGA, erunt latera DG & DE æqualia inter ſe. Quare æquales erunt tres perpendiculares DF, DE & DG inter ſe, quæ ſunt diſtantiæ puncti D à lateribus trianguli. b *prop. 11. lib. 1* c *prop. 25. lib. 1*

Secundò in polygono regulari circunſcribatur *d* circulus, cuius centrum D. Et quia in circulo ABN rectæ lineæ applicatæ AB, BC, CN, &c. ſunt inter ſe æquales: ergo *e* æqualiter diſtant à centro D; ideoque ductæ perpendiculares DG, DE, DF, &c. æquales erunt inter ſe, vt æquales erant in triangulo. Et centro D radio DE, deſcipto circulo EFG, tranſibit neceſſariò per puncta F, G, &c. & continget *f* latera figura & in punctis E, F, G, &c. eo quod radij DE, DF, DG, &c. perpendiculares ſunt ad latera AB, BC, &c. Quare *g* circulus EFG inſcriptus eſt figuræ ABC. Quod erat faciendum. d *prop. 5. huius* e *prop. 10. lib. 2* f *prop. 23. lib. 2* g *Def. 2 huius.*

EVCL. 8. XIII PROPOSITIO VII. *In pentagono regulari duæ rectæ lineæ ſubtendentes angulos figuræ ſe mutuò ſecant extrema, & media ratione; & maiora illarum ſegmenta æqualia erunt pentagoni lateri.* Tab. V. Fig. 32.

Sit pentagonum regulare ABD, & duæ rectæ lineæ AC, BE ſubtendant angulos figuræ ABC & BAE, & ſe ſecent in H. Dico tam CA, quàm EB ſecari in H extrema, & media ratione, & earum maiora ſegmenta CH & EH æqualia eſſe cuilibet lateri pentagoni BA. Deſcribatur *a* circulus ABD circa pentagonum. Quoniam *b* in quadrilatero BEDC circulo inſcripto duo oppoſiti anguli CBE & D, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis: eſtque *c* angulus BCD æqualis angulo D in regulari pentagono. Ergo duo anguli EBC & BCD, ſimul ſumpti, æquales ſunt duobus rectis; ideoque *d* duæ rectæ BE & CD ſunt inter ſe parallelæ. Eadem ratione CA & DE parallelæ ſunt. Quare *e* CHED parallelogrammum erit, in quo latera oppoſita CH & DE æqualia erunt, & ſic HE ipſi CD, vel cuilibet BA æquale erit. Poſtea quia anguli BAC & AEB inſiſtunt peripherijs æqualibus BC & AB: ergo *f* anguli BAC & AEB æquales ſunt; eſtque angulus ABE communis: Ergo *g* triangula

a prop. 15. huius
b prop. 15 lib. 2
c prop 3 huius.
d prop. 16. lib. 1
e prop. 26. lib. 1
f prop. 17. lib. 2
g prop. 4. lib. 4.

EBA

EBA & ABH ſimilia ſunt; ideoque EB ad BA erit, vt AB ad BH: fuit autem oſtenſa HE æqualis ipſi BA. Ergo *h* tota BE ad HE eſt, vt HE ad HB; ideoque *i* BE ſecta eſt in H extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum HE æquale eſt ipſi BA lateri pentagoni. idem concludetur de ſubtenſa CA. Quare patet propoſitum. *h prop. 3. & 7. lib. 3.* *i prop. 25. lib. 4*

PROPOSITIO VIII. *Si figurarum regularium eodem circulo inſcriptarum lateri hexagoni ad datur, vel tollatur, latus decagoni: efficietur recta linea extrema, & media ratione ſecta, maiuſque compoſitæ ſegmentum erit hexagoni latus, & maius ſegmentum diminutæ erit latus decagoni.* Tab. V. Fig. 33. EVCL. 9. XIII.

In circulo ABF ſit recta linea AB latus decagoni regularis, & ei in directum addatur BE *a* æqualis BF lateri hexagoni regularis eidem circulo inſcripti. Dico rectam AE ſecari in B extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit EB: Ducantur rectæ ex centro DA, DB, DF & DE. Quoniam latus hexagoni BF eſt baſis trianguli iſoſcelis BDF cuius angulus ad centrum BDF ſexta pars eſt quatuor *b* rectorum, ſeu tertia pars duorum rectorum. Ergo ſinguli anguli æquales ad baſim B & F *c* tertia pars *a ex co. prop. 3. huius.* *b prop. 3 huius.* *c pr. 10. lib. 2.*

erunt duorum rectorum; & ideo triangulum DBF æquilaterum erit. quarelatus hæxagoni BF, ſeu BE æquale erit radio circuli D B. Et angulus ad centrum ADB, cui ſubtenditur AB latus decagoni regularis, decima pars eſt quatuor rectorum, ſiue quinta pars duorum rectorum; ſuntque c tres anguli trianguli

c prop. 18. lib. 1

iſoſcelij ADB æquales duobus rectis: Ergo quilibet angulus DBA ad baſim æqualis eſt duobus quintis duorum rectorum; & propterea angulus DBA duplus eſt anguli AD B. ſed angulus ABD externus in triangulo DBE æqualis eſt duobus internis, & oppoſitis angulis BDE

d prop. 6. lib. 1.

& E (qui d ſunt æquales, cùm ſubtenſa latera EB, DB æqualia ſint, facta enim fuit EB æqualis radio circuli). Ergo angulus ABD duplus eſt anguli E, vti prius duplus erat anguli ADB & propterea anguli E & BDA æquales inter ſe ſunt, & eſt

e prop. 4. lib. 4.

angulus A communis: e Ergo duo triangula EDA & DBA ſimilia ſunt, ideoque EA ad AD eſt, vt DA ad AB; eſtque EB æqualis radio DA: Ergo ſicut prius AD, ita nunc EB media proportionalis erit

f ex pr. 25. lib. 4

inter EA & BA; proptereaque f E A ſecta erit in B extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit EB latus hexagoni, & BA minus ſegmentum latus decagoni regula-

gulariũ in eodẽ circulo inſcriptorũ.

Secundò ex latere hexagoni EB, ſiue ex radio circuli auferatur recta BH æqualis ipſi BA lateri decagoni eiuſdem circuli. Dico EB ſecari in H extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum erit BH latus decagoni. Nam ex EB maiori ſegmento ipſius EA, ſectæ extrema, & media ratione, tollitur BH ſegmento minori BA æqualis. Ergo ipſa BE ſecatur quoque *g* extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius erit BH. Quod erat oſtendendum. *g ex pr. 25.l.4.*

PROPOSITIO IX. *Circulo dato adſcribere duas figuras regulares inter ſe ſimiles, ita vt circunſcripta, vel inſcriptæ differentia à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita.* Tabula V. Fig. 34. *Archi. prop. 2. lib. 1. de ſphær. & cilindro.*

Sit datus circulus ABC, & quælibet ſuperficies X cuiuſcunque paruitatis. Debent circulo adſcribi imperatæ figuræ. Circunſcribatur *a* circulo ABC quadratum EH, & ad contactũ A coniungatur radius DA & vt *b* ſpatiũ X vna cum quadrato EH eſt ad quadratũ EH, ita *c* fiat quadratum radij AD ad quadratum rectæ lineæ DG, & ducatur *d* à puncto G recta GN perpendicularis ad diametrum, ſecans peripheriam in N, ſeceturque *e* ſemicirculi peri- *a prop. 4. huius* *b prop. 21. lib. 4* *c ex pr. 18. lib. 4* *d prop. 10. lib. 1* *e ex pr. 19. lib. 2*

pheria ACB bifariam, & rurſus bifariam, & ſic ſemper, quouſque
f ex pr. 27. l. 2. *f* arcus AF minor ſit, quàm AN;
g ex pr. 16. lib. 2 Et ſecetur *g* arcus AO æqualis AF, coniungaturque recta FO, quæ *h*
h prop. 19. l. 2 ſecabitur à radio AD in K bifariam, & perpendiculariter. Et quia tres rectæ SA, FK, NG perpendiculares
i prop. 14. l. 1 ſunt ad radium DA, erunt *i* inter ſe parallelæ: cadit verò punctum F inter extremas parallelas AS, GN, eo quod arcus NA maior eſt, quam FA: Ergo punctum K cadit inter puncta A & G; & propterea recta DK maior erit, quàm DG. & ſicut AF metitur ſemiperipheriã AFB, ita
l Ax. 1 lib. 3. *l* OF duplum ipſius AF metietur totam circuli peripheriam. Diſtribuatur iam tota circuli peripheria in partes CF, FO, OP, PQ, &c. inter ſe æquales; & coniungantur rectæ lineæ CF, FO, OP PQ, &c. at-
m Cor. prop. 16 lib. 1. que *m* ijs parallelæ ducantur tangentes SR, RT, TL, &c. quouſque
n ex pr. 4. huius compleantur figuræ *n* regulares ſimiles, circunſcripta SRTV, inſcripta verò CFOPB. Patet figuram SRTV ad figuram CFOPB eſſe, vt quadratum radij illius DA ad
o prop. 2. lib. 3. quadratum radij DK huius; ſed *o* idem quadratum ex DA ad quadratum ex maiori DK minorem rationem habet, quàm ad quadratum ex minori DG, & vt quadratum ex D A ad quadratum ex DG, ita fuit

ſum-

ſumma ſpatij X, & quadrati EH ad quadratum EH: Ergo *p* figura SRTV ad figuram CFOPP minorem proportionem habet, quàm ſumma ſpatij X & quadrati EH ad quadratum EH; Et diuidendo *q* differentia figurarum SRTV & CFOB, ad figuram CFOB minorem proportionem habet, quàm ſpatium X habet ad quadratum EH; habet *r* verò idem ſpatium X ad inſcriptam figuram CFOB maiorem proportionem, quàm ad circunſcriptum quadratum EH, (cùm hoc maius ſit illo): Ergo differentia figurarum SRTV & CFOB ad figuram CFOB minorem proportionem habet, quàm ſpatium X ad eandem figuram inſcriptam CFOB; & prop erea *ſ* differentia figurarum SRTV & CFOB minor erit ſpatio X. Cùmque *t* circulus ABC maior ſit figura inſcripta CFOB, & minor figura circunſcripta SRTV: erit exceſſus figuræ circunſcriptæ ſupra circulum, vel defectus figuræ inſcriptæ ab eodem circulo, minor, quàm ſit differentia figuræ circunſcriptæ SRTV, & inſcriptæ CFOB; Sed differentia harum figurarum adſcriptarum minor oſtenſa eſt magnitudine X. Igitur differentia circunſcriptæ figuræ SRTV, vel inſcriptæ CFOB ab eodem circulo ABC, minor eſt quacunque magnitudine pro-

p prop. 6. lib. 3.

q ex pr. 14. lib. 3

r prop. 2. lib. 3.

ſ prop. 5 lib. 3.

t Axio huius.

po-

poſita X. Quod erat faciendum.

EVCL. 1 XII. PROPOSITIO X. *Quæ in circulis polygona ſimilia, ſiue circunſcripta inter ſe, ſiue inſcripta inter ſe ſunt in duplicata ratione radiorum.* Tabula V. Fig. 35. 36.

Sint duo polygona ſimilia ABD & FGK inſcripta, ſiue circunſcripta circulis, quorum centra R & S. Dico inſcripta inter ſe, ſiue circunſcripta inter ſe habere proportionem duplicatam radiorum eorundem circulorum. Et primò in inſcriptis ducantur rectæ AC, HF ſubtendentes angulos æquales B & G, & coniungantur radij RA, RB, SF & SG. Quoniam circa angulos æquales B & G latera AB ad BC & FG ad GH ſunt proportionalia (propter ſimilitudinem figurarum)
a prop.6 lib. 4. Ergo *a* triangula ABC & FGH ſimilia ſunt, ideoque anguli ACB &
b prop. 13.lib.2 FHG æquales ſunt; ſed *b* anguli ad centrum R & S dupli ſunt angulorum ad peripheriam ACB & FHG: Ergo anguli R & S æquales ſunt, & circa eos latera, ſeu radij circuli ſunt in eadem ratione æqualitatis.
c prop.6 lib.4. Ergo *c* triangula ABR & FGS ſimilia ſunt; propterea que, *d* vt AB ad
d ex pr. 4.l.4. GF, ita erit radius AR ad FS: & *e*
e ex pr. 19.lib.3 eorum duplicatæ proportiones eædem quoque erunt: habet *f* verò
f prop. 17.l.4. polygonum ABD ad polygonum

FGK

by Google

FGK duplicatam rationem lateris AB ad eius homologum FG. Ergo *g* proportio polygoni ABD ad polygonum FGK duplicata eſt proportionis radij AR ad radium FS. *g prop. 7.lib.3.*

Secundo in figuris circunſcriptis ab angulis æqualibus A & F, atque ab æqualibns B & G ad centra iungantur rectæ AR, FS, BR, GS, & ad contactus N, O, X, Z radij coniungantur NR, OS, XR, ZS. Quoniam duo radij NR, XR æquales, atq; RB eſt communis oppoſitus angulis N, X rectis æqualibus: Ergo *h* in duobus triangulis BNR & BXR ſunt duo anguli RBN & RBX æquales, ideoque angulus RBN ſemiſſis erit anguli ABC. Eadem ratione in reliqua figura angulus SGO ſemiſſis eſt anguli polygoni FGH; Et quoniam duo anguli RBN & SGO æquales ſunt, cùm ſint ſemiſſes angulorum æqualium CAB & FGH & *i* ſunt duo anguli recti ad N & O æquales Ergo *l* duo triangula BNR & GOS ſimilia ſunt, ideoque BN ad EO erit, vt NR ad OS. Eadem ratione duo triangula ANR & FOS ſimilia erunt, ideoque AN ad FO erit, vt eadem NR ad eandem OS: Quapropter *m* duæ AN & NB ſimul ad duas FO & OG, ideſt latus AB ad FG: erit vt radius NR ad radium OS, *n* & eorum duplicatæ propor- *h prop. 25.l.1.* *i prop. 23.l.2* *l ex pr. 4.lib.4.* *m prop. 15.lib.3* *n ex pr. 39.l.3.*

tic-

tiones eædem quoque erunt. Quare, vt prius, polygonum ADB ad polygonum FGK habebit proportionem duplicatam eius, quam habet radius NR ad radium OS. Quod erat propoſitum.

EVCL. 33.VI. PROPOSITIO XI. *In eodem, vel æqualibus circulis anguli ad centrum, ſiue ad peripherias, & ſectores eandem rationem habent cum peripherijs, quibus inſiſtunt.* Tabula V. Fig. 37.

In eodem, vel in circulis æqualibus ſint primò duo anguli ad centrum ABC & EBG, inſiſtentes peripherijs AC & EG. Dico eandem rationem habere arcum AC ad EG, quam habet angulus ABC ad angulum EBG. Secetur *a* arcus EG bifariam, & rurſus bifariam, & ſic ſucceſſiuè ſubdiuidantur arcus intercepti *b* quouſque perueniatur ad arcum EM, qui minor ſit quocunque arcu aſſignabili; Et *c* in arcu CA ſumatur arcus CS multiplex ipſius EM, ita vt eius exceſſus, vel defectus SA ab ipſa AC ſit æqualis, aut minor, quàm EM, & ideo minor quacunque data magnitudine; Et coniungantur radij BM, BS. Quoniam *d* quoties arcus EM metitur arcum EG, toties angulus EBM menſurat angulum EBG; pariterque

a ex 19. lib. 2.
b ex pr. 27. l. 2
c ex pr. 16. l. 2.
d ex prop. 17. lib. 2.

que quoties arcus EM menſurat arcum CS, toties angulus EBM menſurat angulum SBC: Igitur *e* arcus SC eædem partes erit arcus EG, quemadmodum angulus SBC eſt partes anguli EBG. Et *f* quoniam, ſi arcus SC æqualis eſt ipſi AC, neceſſariò angulus SBC æqualis eſt angulo ABC (Et tunc patet propoſitum). At ſi *g* arcus SC maior eſt, quàm AC, neceſſariò angulus SBC, maiori peripheriæ inſiſtens, erit maior quàm angulus ABC; Et ſi arcus SC minor fuerit, quàm AC, erit angulus SBC minor angulo ABC. Quare ſunt quatuor magnitudines arcus AC prima, at ſecunda eſt arcus EG; angulus ABC eſt tertia, & angulus EBG eſt quarta; & inſuper duæ aliæ magnitudines, ſcilicet arcus SC, & angulus SBC ſunt eædem partes conſequentium, ideſt ad eas habent eandem proportionem; & ſunt vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus, ita vt exceſſus, aut defectus à prima minor ſit quacunque aſſignabili quantitate. Ergo *h* arcus AC ad arcum EG eſt, vt angulus ABC ad angulum EBG; quod erat oſtendendum.

e def. 6. lib. 3.

f ex pr. 17. l. 2.

g ex ead

h prop. 24. l. 3

Secundò ſint ad peripheriam duo anguli ADC & EDG inſiſtentes peripherijs AC & EG eiuſdem, vel æqualium circulorum. Dico angulum ADC ad angulum EDG eſſe,

vt

vt arcus AC eſt ad arcum EG. Fiant anguli ad centrum ABC & EBG. Quia *i* angulus ADC ſemiſſis eſt anguli ad centrum ABC & angulus EDG ſemiſſis eſt anguli EBG. Ergo, *l* vt angulus ABC ad angulum EBG, ita eſt angulus ADC ad angulum EDG; ſed, vt angulus ABC ad angulum EBG, ita eſt peripheria AC ad peripheriam EG (ex prima parte huius.) Ergo, *m* vt angulus ADC ad angulum EDG, ita eſt peripheria AC ad peripheriam EG, quod erat ſecundum.

i prop. 13 lib. 2

l pr. 11. lib. 3.

m pr. 7. lib. 3.

Tertiò in eodem, vel æqualibus circulis dico ſectorem ABC ad ſectorem EBG habere eandem rationem, quam arcus AC, quæ eſt baſis illius, ad arcum EG, quæ eſt baſis alterius ſectoris, facta ſuperiori conſtructione, ea omnia, quæ dicta ſunt de angulis ad centrum intelligantur dicta de ſectoribus. Quapropter *n* ſector SBC erit eædem partes ſectoris EBG, quemadmodum angulus SBC partes eſt anguli EBG, ſeu arcus SC eſt partes arcus EG. Inſuper *o* arcus SC arcu AC, atque ſector SBC ſectore ABC vnà maiores, aut vnà minores erunt. Quare ſunt quatuor magnitudines arcus AC, arcus EG, ſector ABC & ſector EBG, atque duæ aliæ ſcilicet arcus SC, & ſector SBC ſunt

n Def. 6. lib. 3.

o ex pr. 7. lib. 2.

eæ-

eædem partes conſequentium, ſcilicet ipſius arçus EG, & ſectoris EB G, quæ denominantur à numero ex continua bipartitione conſequentium orto, & ſunt vnà excedentes, vel vnà deficientes à prima & tertia, ſcilicet ab arcu AC, & à ſectore ABC. Eſtque exceſſus ipſius S C à prima AC, vel defectus minor quolibet dato. Ergo *p* arcus AC ad arcum EG eandem rationem habet, quam ſector ABC ad ſectorem EBG. Quod erat poſtremo loco oſtendendum. *p pr. 14. lib. 3.*

PROPOSTIO XII. *Circuli inter ſe ſunt in duplicata ratione radiorum* Tabula V. Figura 38. *EVCL. 2. XII.*

Sint duo circuli R & S, eorumque radij AE & FK, quorum tertius proportionalis ſit X. Dico circulum R ad circulum S habere duplicatam proportionem eius, quam habet radius AE ad radium FK, ſeu eandem, quam AE habet ad X. Adſcribantur *a* circulo R duo polygona regularia ſimilia ABCD & MN OP, ita vt exceſſus figuræ MNOP circumſcriptæ ſupra circulum, & defectus figuræ. ABCD inſcriptæ ab eodem circulo R minor ſit quacunque magnitudine propoſita; poſtea *b* adſcribantur circulo S duæ figuræ FGHI & QOVT ſimiles ipſis figuris ABCD & MNOP: erunt *a prop. 9. hu.* *b ex pr. 4. huius*

c ſi-

e pr 10. huius. *e* ſimiles figuræ circunſcriptæ MN OP & QOVT inter ſe, nec non ſimiles figuræ inſcriptæ ABCD & FGHI inter ſe in duplicata ratione radij EA ad radium KF, ſeu *d* vt AE ad X. Et quoniam circulus S minor eſt polygono TOV ei circunſcripto. Ergo polygonum *e* MNO ad circulum S maiorem proportionem habet, quàm ad polygonum TOV; habet verò polygonum MNO ad polygonum QOV eandem proportionem, quam AE ad X. Ergo *f* polygonum MNO, (id eſt quantitas excedens circulum R exceſſu minore quocunque dato) maiorem proportionem habet ad circulum S, quam AE ad X. Similiter quia circulus S maior eſt polygono ei inſcripto FGH; Ergo *g* polygonum ABC ad circulum S minorem proportionem habet, quàm ad polygonum FGH: habet autem polygonum ABC ad polygonum FGH proportionem eandem, quam AE ad X. Ergo *h* polygonum inſcriptum ABC (minor circulo R defectu minori quocunque dato) minorem proportionem habet ad circulum S, quàm AE ad X; ideoque *i* circulus R ad circulum S eandem duplicatam proportionem habebit radij AE ad radium FK. Quod erat oſtendendum.

d prop 7 lib. 3.

e pr 2. lib. 3.

f pr. 6. lib. 3.

g prop. 2. lib. 3.

h prop. 6. lib. 3.

i Schol. prop. 24 lib. 3.

PRO-

PROPOSITIO XIII. *Circulus æqualis eſt triangulo, cuius baſis æqualis eſt peripheriæ circuli, altitudo verò æqualis radio circuli.* Tabula V. Fig. 39.
Archi. de circ. mens. prop. 1.

Sit circulus X, cuius radius XB, & triangulum HKM, cuius baſis KM æqualis ſit integræ peripheriæ ABD, & altitudo, ſeu perpendicularis HK æqualis ſit radio circuli XB. Dico circulum æqualem eſſe triangulo HKM. Adſcribantur *a* circulo X duo polygona regularia, & ſimilia EFG extra, & ABC intra ipſum, ita vt differentia eorum à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Poſtea *b* ducta XO perpendiculari à centro ad latus figuræ in ſcriptæ, coniungantur rectæ XF, XE & XA, & *c* fiat KN æqualis perimetro circunſcripti polygoni EFGI & KS æqualis perimetro figuræ ABCD & RK æqualis perpendiculari XO, & coniungantur rectæ HN & RS. Quoniam *d* polygonum regulare EFGI diuiditur in tot triangula iſoſcelia æqualia inter ſe, verticem in centro X habentia, quot ſunt eius latera: ſunt verò dicta triangula æquè alta, quia eorum altitudines ſunt radij æquales ipſi XL, ſeu HK. Ergo *e* polygonum EFGI eſt tam multiplex trianguli EXF, quàm perimeter eiuſdem polygoni eſt multiplex

a prop. 9 huius.
b prop. 11. l. 1.
c prop. 3 lib. 2.
d ex pr. 3. huius.
e Def. 5. lib. 3.

vnius

vnius lateris EF; ſed KN eſt æqualis perimetro EFGI dicti polygoni.
f pr. 3. lib. 3. Ergo, *f* vt KN ad EF, ita eſt polygonum EFGI ad triangulum EXF;
g prop. 1. lib. 4. ſed *g* triangulum KHN ad triangulum EFX (cum habeant æquales altitudines, ſcilicet perpendiculares XL & HK) eſt, vt baſis KN ad
h prop. 7. lib. 3. baſim EF. Ergo *h* polygonum EFGI, & triangulum HKN eandem rationem habent ad triangulum EX
i prop. 4 lib. 3. F, ideoque *i* illa æqualia ſunt inter
l Ax. huius. ſe. Deinde *l* quia rectæ lineæ inflexæ lEL, extra circulum cadentes, maiores ſunt, quàm arcus lAL: ergo perimeter figuræ FGI maior erit, quàm tota peripheria circuli X comprehenſi; ſed KN æqualis poſita fuit perimetro EFGI & KM æqualis peripheriæ circuli X. Ergo KN maior eſt, quàm KM. Sed
m ex prop. 3. lib. 1. triangula HKN & HKM ſunt æquè alta. Ergo *m* triangulum HKN maius erit triangulo HKM, ſicuti polygonum EFGI maius eſt circulo X. Similiter oſtendetur polygonum ABCD æquale triangulo RK
n prop. 1. lib. 4. S, *n* eo quod baſis KS æqualis ponitur perimetro dicti polygoni, &
o Ax. huius. altitudines RK & XO ſunt etiam æquales; eſtque *o* perimeter polygoni ABCD inſcripti, ſeu ei æqualis KS minor periferia circuli X, ſeu ei æquali KM, & altitudo RK, ſeu XO minor altitudine HK, ſeu

ra-

XL. Ergo triangulum RKS
s eſt triangulo HKM, ſicuti
gonum ABCD minus eſt cir-
X. Iam cum polygonum FEG
le ſit triangulo HKN, & tri-
lum HKN maius ſit triangulo
M. Ergo circunſcripta figura
(quæ eſt maior circulo X ex-
minori quocunque dato) eſt
ue maior triangulo HKM.
iter cum figura ABD æqualis
angulo RKS, & triangulum
minus ſit triangulo HKM.
inſcripta figura ABD (quæ
r eſt circulo X defectu minori
nque dato) eſt quoque mi-
iangulo HKM. Et propterea
ulus X æqualis eſt triangulo *p ſchol. prop. 14. lib. 3.*
I. Quod erat oſtendendum.

llarium. Patet triangulum,
baſis æqualis ſit perimetro cu-
et figuræ regularis, & altitudo
is ſit perpendiculari à centro
e ad eius latus ductæ æquale
idem regulari figuræ. Oſten-
nim fuit triangulum HKN,
s dictas conditiones, æquale
ono regulari EFGI.

POSITIO XIV. *Peripheriæ* *Pappi 11. l. V.*
r ſe eandem rationem habent,
m radij eorundem circulorum.
o. VI. Fig. 1.
t circuli R & S, quorum radij
RA,

RA, SC. Dico, vt radium RA ad radium SC, ita eſſe peripheriam ABA ad peripheriam CDC. Intelligatur triangulum V, cuius baſis FG æqualis ſit peripheriæ ABA, & altitudo EF æqualis ſit radio RA. Similiter intelligatur triangulum X, cuius baſis KM æqualis ſit peripheriæ CDC, & altitudo HK æqualis ſit radio SC. Patet *a* triangulum V æqualem eſſe circulo R, atque triangulum X eſſe æquale circulo S, ideoque *b* triangulum V ad triangulum X erit, vt circulus R ad circulum S. Et quia circulus *c* R ad circulum S duplicatam rationem habet eius, quam habet radius RA ad radium SC: Ergo *d* triangulum V ad triangulum X duplicatam rationem habet eius, quam habet RA ad SC, ſeu *e* duplicatam rationem eius quam habet altitudo EF ad altitudinem HK (cum RA, EF inter ſe, & SC, HK inter ſe æquales factæ ſint) cumque *f* proportio trianguli V ad triangulum X ſit compoſita ex ratione lateris EF ad latus HK, & ex ratione baſis FG ad baſim KM, cùm ſint circa angulos rectos F, K, æquales: Ergo *g* proportio baſis FG ad baſim KM eadem eſt, quam EF habet ad HK, *h* ſeu quam RA habet ad SC. Eſtque FG æqualis peripheriæ ABA, & KM æqualis peripheriæ CDC.

a pr. 13 huius.
b prop. 3. lib. 3
c pr. 12. huius.
d pr. 7. lib. 3.
e prop. 3. lib. 3.
f Prop. 13. l. 4.
g ex pr. 19. l. 3.
h prop. 3. lib. 3.

Ergo *i* peripheria ABA ad pe-
riam CDC eandem rationem
, quam radius RA ad radium
Vt erat propoſitum.

OPOSITIO XV. *Si duorum*
culorum ſegmenta comprehendant
ulos æquales, erunt ſuis circulis
portionalia, & inter ſe rationem
ebunt duplicatam ſubtenſarum
radiorum, & eorum peripheriæ
nt inter ſe, vt ſubtenſæ, vel vt
lij. Vocentur autem huiuſmodi Se-
ienta ſimilia. Tab. VI. Fig. 2.
it duo circulorum ſegmenta
& FGH, in quibus anguli B
ſint æquales. Ductis radijs
EC, OF & OH. Dico ſeg-
um ABC ad circulum ABCD
vt ſegmentum FGH ad circu-
FGHK, & ſegmenta ABC,
GH eſſe in duplicata ratione
rum EA & OF, vel ſubtenſa-
A C & F H; & peripherias
, FGH eſſe, vt AC ad FH.
iam anguli B & G ponuntur
les: Ergo *a* eorum dupli ad
um E & O çquales erunt, ideo-
b quatuor recti ad angulos æ-
ès E & O eandem rationem
bunt; ſed, *c* vt quatuor recti
gulum E, ita eſt circulus BA
ſectorem AECA, atque etiam,
uatuor recti ad angulum O, ita
rculus GFH ad ſectorem FO

i prop. 7. lib. 3.

Pappi 13. l. V.

a prop. 13. lib. 2
b pr. 3. lib. 3.
c ex pr. 11, hu.

d prop. 7. lib. 3. HF. Ergo, *d* vt circulus BAC ad ſectorem AECA ita erit circulus GFH ad ſectorem FOHF: & *e* per-
e prop. 12. lib. 3 mutando vt circulus ABD ad circulum FGK, ita erit ſector AECD
f prop. 12. hu. ad ſectorem FOHK: ſed *f* circuli ſunt inter ſe in duplicata ratione ra-
g pr. 7. lib. 3. diorum EA ad OF. Ergo *g* ſectores in eadem duplicata ratione radij BA ad OF erunt. Sunt *h* verò trian-
h pr. 4. lib. 4. gula AEC & FOH ſimilia (cum ſint iſoſcelia, & habeant verticales
i prop. 15. lib. 4 angulos E & O æquales): Ergo *i* triangulum EAC ad triangulum OFH duplicatam rationem habet eius quam habet radius EA ad OF, vel ſubtenſa AC ad FH. Quare, *l* vt
l prop. 7 lib. 3. ſector EADC ad ſectorem OFKH, ita eſt triangulum EAC ad triangu-
m prop. 15. lib. 3 lum OFH: Vnde *m* reſiduum ſegmentum ACD ad ſegmentum FKH erit in eadem ratione ſectorum, vel
n prop. 15. lib. 3 circulorum; & propterea *n* reliquum ſegmentum ABC ad ſegmentum FGH erit quoque in eadem ratione circuli ABD ad circulum FG
o prop. 7. lib. 3 H, *o* ſeu in duplicata proportione radij EA ad radium OF, vel ſubtenſæ AC ad ſubtenſam FH.

Tandem quoniam anguli ad centra AEC & FOH æquales ſunt. Ergo *p* tota circuli peripheria AB
p ex pr. 11. hu. CA eſt ad arcum ADC vt ſunt qua-
q prop. 3. lib. 3. tuor recti ad angulum AEC, ſiue *q* ei æqualem angulum FOH: pariter-

terque tota circuli peripheria FGH F ad arcum FKH eſt in eadem ratione, ac ſunt quatuor recti ad angulum FOH. *r* Ergo vt circuli peripheria ABCA ad arcum ADC ita erit peripheria circuli FGHF ad ad arcũ FKH. Et *ſ* permutando circuli peripheria ABD ad circuli peripheriam FGK eſt, vt arcus ADC ad arcum FKH, *t* ideoque reſidua peripheria ABC ad reſiduam FGH erit, vt tota ad totam; ſed *u* tota peripheria ABD ad totam peripheriam FGK eſt, vt radius EA ad radium OF, ſiue vt ſubtenſa AC ad ſubtenſam FH (eo quod fuit AC ad FH, vt EA ad OF) Ergo *x* peripheria ABC ad peripheriam FG H eſt vt ſubtenſa AC ad rectam ſubtenſam FH, ſiue vt radius AE ad radium FO, vt fuit propoſitum. Vocentur autem ſegmenta ABC & FGH capientia angulos æquales B & G inter ſe *Similia*.

r prop. 7. lib. 3 *ſ prop. 12. l. 3.* *t prop. 15. lib. 3* *u pr. 14 huius.* *x prop. 7. lib. 3.* *g ex pr. 25. l. 4.*

PROPOSITIO XVI. *In quolibet triangulo maior angulus ad minorem habet maiorem rationem, quàm latus maiori angulo oppoſitum ad latus oppoſitum angulo minori.* Tabula VI. Fig. 3.

Ptol. Alm. l. 1. c. 9.

In triangulo ABC ſit angulus C maior, & angulus A minor. Dico angulum C habere maiorem pro-

portionem ad angulum A, quàm latus AB habet ad latus BC *a* Deſcribatur circa triangulum circulus ABC, & ſecetur arcus BC vtcunque in E; Et *b* fiat arcus BD æqualis BE; iunganturque rectæ lineæ CE, BE, AD, BD. Et quia *c* arcus ADB, cui maior angulus C inſiſtit, maior eſt, quàm BEC, & arcus BD, & BE ſunt æquales: Ergo reſiduus arcus AD maior erit reſiduo arcu CE, & ideo *d* angulus ABD maior erit angulo CBE. Fiat *e* iam angulus ABO æqualis minori angulo EBC: Igitur angulus ABD maior erit angulo ABO, & ideo recta BO ſecabit rectam AD in puncto O, poſito inter A & D, & ideo punctum O erit intra circuli ſegmentum ADB. Deſcribatur *f* iam per tria puncta A, O & B circuli peripheria AOB, cadet illa intra ſegmentum ADB; Et quoniam in triangulis AOB & CEB duo *g* anguli OAB, ECB æquales ſunt (cùm peripherijs æqualibus BD & BE inſiſtant); pariterque duo anguli OBA, EBC ſunt æquales: Ergo *h* reliqui anguli AOB & CEB æquales erunt; propterea que *i* peripheria AOB ad peripheriam BEC erit, vt ſubtenſa AB ad rectam lineam BC eſt verò *l* arcus ADB maior, quàm arcus AOB, eo quod hic ab illo comprehenditur. Igitur *m* arcus ADB

a ex pr. 1. lib. 2.
b ex pr. 16. l. 2.
c ex eadem.
d ex pr. 17. lib. 2
e prop. 24. l. 1.
f ex pr. 1. lib. 2.
g ex pr. 17. lib. 2
h ex pr. 18. lib. 1
i prop. 15. hu.
l Axi. 10. hu.
m prop. 2. l. 3.

ɩiorem rationem habet ad eundem ɛum BC, quàm arcus AOB; & eo *n* arcus ADB ad arcum BEC aiorem rationem habebit, quam ɛta linea AB ad rectā BC. Et eſt *o* ɩgulus BCA ad angulum BAC, vt ɛcus ADB ad arcum BEC. Ergo angulus BCA maiorem rationem abet ad angulum BAC, quàm ſub enſa AB habeat ad rectā lineam ſub enſam BC. Quod erat oſtendendum

n *prop. 6. lib. 3.*
o *prop. 11. hu.*
p *prop. 6. lib. 3.*

PROPOSITIO XVII. *Inter duas figuras ſimiles regulares, vel circulos, aut ſectores ſimiles, medium proportionale eſt triangulum, cuius altitudo æqualis eſt radio vnius, baſis verò æqualis eſt perimetro alterius* Tab. VI. Fig. 4. 5.

Sint duæ quælibet figuræ regulares ſimiles inter ſe, vel duo ſectores ſimiles, aut duo circuli R & S, quorum radij RB & SE; ſitque triangulum rectangulum GHM, cuius altitudo GH æqualis ſit radio SE vnius figuræ S, & baſis HM æqualis ſit BAC perimetro figuræ R. Dico triangulum GHM medium proportionale eſſe inter figuras R & S. *a* Fiat altitudo NH æqualis radio RB & baſis HO æqualis perimetro EDF, & iungantur rectæ NM & GO. Quoniam in ſimilibus figuris regularibus vel in ſectoribus ſimilibus aut circulis R & S *b* vt radius

a *prop. 3. lib. 1.*
b *ex pr. 14. hu.*

 dius

dius RB ad radium SE, ita eſt perimeter ABC ad perimetrum DEF: eſtque NH æqualis RB & GH æqualis SE; atque HM æqualis perimetro ABC nec non HO æqualis
c prop. 3. lib. 3. DEF. *c* Ergo vt NH ad GH, ita eſt MH ad HO; ſed *d* vt altitudo N
d ex pr. 1. lib 4. H ad GH, ita eſt triangulum NH M ad GHM (cùm habeant eandem
e prop. 1. lib. 4. baſim HM); & *e* vt baſis MH ad baſim HO, ſeu *f* vt NH ad GH,
f prop. 7. lib. 3. ita eſt triangulum GHM ad triangulum GHO. Ergo triangulum GHM medium proportionale eſt inter duo triangula NHM, & GH
g ex pr. 13. hu. O; eſt *g* verò triangulum rectangulum NHM æquale figuræ R, cùm contineatur à radio, & perimetro dictæ figuræ R: pariterque triangulum GHO eſt æquale figuræ S: Igitur *h* vt figura R ad triangulum G
h pr. 3. lib. 3. HN, ita eſt triangulum GHM ad figurã S, & propterea triangulũ GH M medĩũ proportionale eſt inter figuras R & S. Quod erat oſtendendũ.

EVCL. 47. I. 31 VI. PROPOSITIO XVIII. *In triangulis rectangulis qualibet figura rectilinea, vel circularis ſuper hypotheniuſa deſcripta æqualis eſt duabus figuris ſuper lateribus rectum angulum continentibus deſcriptis, quæ illæ ſimiles ſint, & ſimiliter poſita.* Tab. VI. Figura 6.

Sit triangulum ABC rectangulum in A & ſuper tribus eius lateribus

deſcribantur quælibet tres figuræ X, R & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ, ſiue ſint circuli, ſiue ſectores, ſiue ſegmenta, ſiue zonæ, ſiue figuræ rectilineæ. Oſtendendum eſt figuram X ſuper hypothenuſam BC deſcriptam æqualem eſſe duabus figuris R & S illis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ſuper lateribus BA & AC. Ducatur *a* ab angulo recto A perpendicularis ADſuper B C. Manifeſtum eſt *b* C B ad BD duplicatam rationem habereeius, quam habet CB ad BA; pariterque BC ad CD duplicatam rationem habebit eius, quam habet BC ad CA. Et quoniam *c* X ad R (cùm ſint figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ) duplicatam rationem habet lateris BC ad eius homologum BA: Ergo *d* X ad R eſt, vt CB ad BD. Eadem ratione figura X ad figurã S eandem proportionem habebit, quã BC ad CD: Ergo *e* figura X ad duas figuras R & S eandem rationem habebit, quam BC ad duas BD & DC ſimul ſumptas; ſed BC æqualis eſt duabus BD & DC. Ergo *f* figura X æqualis eſt duabus figuris R & S ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

a prop. 12.l.1.
b prop. 9.lib.4. & pr. 19.lib.3
c pr.17. lib.4.
d ex pr. 19.l.3.
e ex pr. 22.lib.3
f ex pr. 16. l.3.

PROPOSITIO XIX. *Qualibet figura ſiue circularis ſiue rectilinea ſuper ſummam duarum rectarum de-* EVCL. 4. l.II.

ſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper eis; vna cum duplo ſpatij medij proportionalis inter easdem. Tab. VI. Figura 7.

Super AB, BC & ſuper ambas in directum poſitas deſcriptæ ſint figuræ rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ, ſiue circuli, aut ſectores, vel zonæ R, S & M. Dico figuram M æqualem eſſe figuris R & S vna cum duplo ſpatij medij proportionalis inter R & S. Super diametro AC deſcribatur ſemicirculus in quo eleuata perpendiculari BD & coniunctis AD, DC ſuper eas deſcribantur figuræ X, Y & Z ſimiles & ſimiliter poſitæ prioribus R, S, M. Quoniam in triangulo ADC *a* rectangulo in D *b* qualibet figura M, ſuper bypothenuſa AC deſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus X & Y ſuper lateribus AD & DC ſimiliter deſcriptis; ſed *c* in triangulo ABD rectangulo in B figura X ſuper hypothenuſa AD deſcripta æqualis eſt duabus figuris R & Z illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper lateribus AB & DB: pariterque in triangulo DBC rectangulo in B figura Y ſuper DC deſcripta æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus S & Z, & ſimiliter poſitis ſuper CB & DB. Ergo figura M æqualis eſt figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis R & S,

a prop. 20. l. 2.
b prop. 18. hu.
c prop. 18. hu.

&

& duplo figuræ Z. Eſtque figura Z media proportionalis inter R & S eo quod tres eorum radij vel latera homologa AB, BD, BC ſunt continuæ proportionalia. Ergo figura M æqualis eſt figuris R, S & duplo medij proportionalis Z inter R, S. Quod erat &c.

Corollarium Si duæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale duobus quadratis ex datis rectis, & duplo parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis contenti. Nam *d* quadrata ſunt figuræ ſimiles, cum ſint regulares: vnde ex hac propoſitione, quadratum M æquale erit duobus quadratis R & S vnà cum duplo quadrati Z; ſed *e* quadratum Z æquale eſt rectangulo parallelogrammo ABC (eò quòd perpendicularis BD media proportionalis eſt inter AB & BC). Ergo quadratum M ex aggregato æquale eſt duobus quadratis R & S ex rectis datis, vnà cum duplo rectanguli ABC ſub rectis datis contenti.

EVCL. 4.II.

d prop. 3 huius

e ex pro. 14. lib. 4

PROPOSITIO XX. *Si ſuper duabus rectis lineis, & ſuper earum differentia, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex differentia æqualis differentiæ duarum figurarum ex illis rectis à duplo ſpatij medij pro-*

proportionalis inter eaſdem. Tabula VI. Fig. 8.

Sit recta AB maior, & BC minor, earunque differentia AC, & in ſemicirculo ADB deſcripto ſuper AB, eleuata ſit perpendicularis CD, & ducta DB, atque ſuper A B, BC, AC, BD, CD, deſcriptæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ vt in præcedenti propoſitione factum eſt erit (ex 9. l. 4.) BD media proportionalis inter AB & BC; & ideo (ex 18. l. 4.) figura Z erit media proportionalis inter figuras R & S. Dico figuram M ex differentia AC deſcriptam, æqualem eſſe exceſſui quo duæ figuræ R & S ſuperant duplum figuræ Z. Quoniam *a* figura R ex ſumma ipſarum AC & CB æqualis eſt ſummæ figurarum S, M, & duplo figuræ Y ex media proportionali inter AC & C B. Ergo addita communi figura S: erunt figuræ R & S ſimul ſumptæ, æquales figuræ M duplo figuræ Y, duplo figuræ S, ſimul ſumptis. Sed in *b* triangulo rectangulo BCD, duplũ figuræ Z ex hypothenuſa æquale eſt duplo figuræ S vnà cùm duplo figure Y. Igitur duæ figuræ R & S, ſimul ſumptæ, æquales ſunt figuræ M vnà cum duplo figuræ Z; & ablato communiter duplo figuræ Z: erit figura M ex differentia AC, æqualis

a prop. 19. hu.

b pr. 18. huius.

lis exceſſui duarum figurarum R & S ſupra duplum figuræ Z quæ eſt media proportionalis inter R & S. Quod erat oſtendendum.

Corollarium Manifeſtum eſt, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, eſſe quadratum, ſuper differentia datarum linearum deſcriptum, æquale differentiæ inter duo quadrata ſuper eiſdem lineis deſcripta, & duplum parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis lineis contenti. EVCL. 7. II.

Nam ex hac propoſitione quadratum M æquale eſt exceſſui duorum ei ſimilium quadratorũ R & S ſupra duplum quadrati Z; ſed *c* quadratum Z æquale eſt rectangulo A BC (eo quod *d* DB media proportionalis eſt inter rectas AB & BC propter perpendicularem DC) Ergo quadratũm M æquale eſt exceſſui quadratorum R & S ſupra duplum rectanguli ABC. *c ex pr. 14. lib. 4* *d prop. 9. lib. 4.*

PROPOSITIO XXI. *Si ſuper duabus rectis, & ſuper aggregato, & differentia earundem rectarum linearum deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex aggregato æqualis figuræ ex differentia vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſuper inæquales rectas deſcriptas.* Tab. VI. Fig. 9.

Sit rurſus recta linea AB maior, & BC minor, & ſit BD æqualis minori BC; erit AC aggregatum, & differentia AD, ſitque BE media proportionalis inter AB & BC, & ſuper eas deſcriptæ ſint figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ R, S, M, N & Z. Dico figuram M ex aggregato æqualem eſſe figuræ N ex differentia, vnà cum quadruplo figuræ Z quæ eſt media proportionalis inter figuras R & S. Quoniam *a* figura M ex aggregato ipſarum AB & BC æqualis eſt figuris R & S cum duplo figuræ Z; atque *b* duæ figuræ R & S æquales ſunt figuræ N ex differentia AD vnà cum duplo figuræ Z. Ergo figura M æqualis eſt figuræ N, & quadruplo figuræ Z, ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

a prop. 19. hu.
b prop. 20. hu.

EVCL, 8.II. *Corollarium* Manifeſtum eſt, quòd ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale quadrato ex differentia datarum linearum deſcripto, vnà cum quadruplo paralellogrammi rectanguli ſub inæqualibus rectis datis contenti. Nam quadrata R, S, N, M & Z ſunt figuræ ſimiles; & ideo (ex hac propoſitione) quadratum M æquale erit quadrato N vnà cum quadruplo quadrati Z mediæ proportionalis BE inter inæquales rectas AB & BC,

BC; eſtque *c* parallelogrammum rectangulum ABC æquale quadrato Z. Ergo quadratum M æquale eſt quadrato N vnà cum quadruplo rectanguli ABC.

c ex prop. 14 lib. 4.

PROPOSITIO XXII. *Si ſuper duas rectas lineas inæquales, atque ſuper media proportionali inter aggregatum, differentiamque earundem, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit differentia figurarum ex inæqualibus rectis lineis deſcriptarum æqualis figura ex illa media proportionali deſcripta.* Tabula VI. Fig. 10.

Sint duæ rectæ AB maior, & eius portio AC, & *a* ipſi AC addatur DA æqualis maiori AB, erit D C ſumma, & CB differentia ipſarum AB & AC; ponaturque *b* CE in ſemicirculo BED perpendicularis & media proportionalis inter D C & CB; & ſuper AB, AC, CE deſcriptæ ſupponantur figuræ R, S & M circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico exceſſum figuræ R ſupra figuram S æqualem eſſe figuræ M, coniungatur recta AE ſuper quam deſcribatur figura O ſimilis & ſimiliter poſita ac ſunt R, S & M. Et quia *c* in triangulo AEC rectangulo in C figura O æqualis eſt figuris S & M ſimul ſumptis; ſuntque radij circuli AB, AE

a prop. 3 lib. 1.

b prop. 10. lib. 4.

c prop. 18. huius

AE æquales, ergo figura R æqualis eſt ei ſimili figuræ O; & proinde figura R erit æqualis duabus figuris S & M. Quare differentia figurarum R & S æqualis erit figuræ M ex media, proportionali inter DC ſummam & CB differentiam duarum inæqualium BA & AC. Quod erat &c.

EVCL. 5.6.II. *Corollarium* Manifeſtum eſt differentiam duorum quadratorum æqualem eſſe parallelogrammo rectangulo contento ſub differentia, & aggregato laterum. Nam quadrata ſunt figuræ ſimiles; & ideo, ex hac propoſitione, exceſſus quadrati R ſupra quadratum S æqualis eſt quadrato M ex EC media proportionali inter aggregatum DC, & differentiam CB eorundem laterum AB, AC deſcripto; ſed quadrato *d* M æquale eſt parallelogrammum rectangulum DCB, cùm hoc ab extremis: illud verò ex media trium proportionalium DC, CE, CB facta ſint. Ergo exceſſus quadrati R ſupra quadratum S æqualis eſt rectangulo ſub CB differentia laterum, & ſub DC aggregato eorundem BA & AC contento.

d ex prop. 14. l. 4.

EVCL. 9. 10. II. PROPOSITIO XXIII. *Si ſuper duabus rectis lineis inæqualibus, & earum aggregato, atque differentia deſ-*

deſcriptæ fuerint quælibet circulares, vel rectilineæ figuræ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erunt duæ figuræ ex aggregato, & ex differentia, ſimul ſumptæ, æquales duplo figurarum ab inæqualibus lineis datis deſcriptarum. Tabula VI. Fig. II.

Super duabus rectis lineis inæqualibus AB & BC, & earum aggregato AC, earumque differentia AD ſint deſcriptæ quælibet circulares, aut rectilineæ inter ſe ſimiles figuræ, & ſimiliter poſitæ R, S, M & N. Dico duas figuras M ex aggregato, & N ex differentia datarum, ſimul ſumptas, æquales eſſe duplo figuræ R vnà cum duplo figuræ S, ex datis lineis deſcriptarum. Quoniam *a* figura M æqualis eſt figuræ N vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter R & S: Ergo addita communiter figura N, erunt figuræ M & N æquales ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N, & quadruplo medij proportionalis inter figuras R & S; ſunt *b* verò figuræ R & S ex inæqualibus rectis AB, BC deſcriptæ æquales figuræ N ex differentia vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R & S: Ergo duplum figuræ R, vnà cum duplo figuræ S æquale eſt iiſdem ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N vnà cum quadruplo medij proportionalis inter figuras R & S. Quare figuræ

a prop. 21. huj.

b prop. 20. huj.

portionem ad angulum A, quàm
a ex pr. 1. lib. 2. latus AB habet ad latus BC *a* De-
ſcribatur circa triangulum circulus
ABC, & ſecetur arcus BC vtcun-
b ex pr. 16. l. 2. que in E; Et *b* fiat arcus BD æqua-
lis BE; iunganturque rectæ lineæ
c ex eadem. CE, BE, AD, BD. Et quia *c* ar-
cus ADB, cui maior angulus C in-
ſiſtit, maior eſt, quàm BEC, & ar-
cus BD, & BE ſunt æquales: Er-
go reſiduus arcus AD maior erit
d ex pr. 17. lib. 2 reſiduo arcu CE, & ideo *d* angulus
ABD maior erit angulo CBE. Fiat
e prop. 24. l. 1. *e* iam angulus ABO æqualis minori
angulo EBC: Igitur angulus ABD
maior erit angulo ABO, & ideo re-
cta BO ſecabit rectam AD in pun-
cto O, poſito inter A & D, & ideo
punctum O erit intra circuli ſeg-
f ex pr. 1. lib. 2. mentum ADB. Deſcribatur *f* iam
per tria puncta A, O & B circuli
peripheria AOB, cadet illa intra
ſegmentum ADB; Et quoniam in
g ex pr. 17. lib. 2 triangulis AOB & CEB duo *g* angu-
li OAB, ECB æquales ſunt (cùm
peripherijs æqualibus BD & BE in-
ſiſtant); pariterque duo anguli OB
h ex pr. 18. lib. 1 A, EBC ſunt æquales: Ergo *h* re-
liqui anguli AOB & CEB æquales
i prop. 15. hu. erunt; propertereaque *i* peripheria
AOB ad peripheriam BEC erit, vt
ſubtenſa AB ad rectam lineam BC
l Axi. 10. hu. eſt verò *l* arcus ADB maior, quàm
arcus AOB, eo quod hic ab illo com-
m prop. 2. l. 3. prehenditur. Igitur *m* arcus ADB

ma-

maiorem rationem habet ad eundem arcum BC, quàm arcus AOB; & ideo *n* arcus ADB ad arcum BEC maiorem rationem habebit, quam recta linea AB ad rectã BC. Et eſt *o* angulus BCA ad angulum BAC, vt arcus ADB ad arcum BEC. Ergo *p* angulus BCA maiorem rationem habet ad angulum BAC, quàm ſubtenſa AB habeat ad rectã lineam ſub tenſam BC. Quod erat oſtendendum

n prop. 6. lib. 3.

o prop. 11 hu.

p prop. 6. lib. 3.

PROPOSITIO XVII. *Inter duas figuras ſimiles regulares, vel circulos, aut ſectores ſimiles, medium proportionale eſt triangulum, cuius altitudo æqualis eſt radio vnius, baſis verò æqualis eſt perimetro alterius* Tab. VI. Fig. 4. 5.

Sint duæ quælibet figuræ regulares ſimiles inter ſe, vel duo ſectores ſimiles, aut duo circuli R & S, quorum radij RB & SE; ſitque triangulum rectangulum GHM, cuius altitudo GH æqualis ſit radio SE vnius figuræ S, & baſis HM æqualis ſit BAC perimetro figuræ R. Dico triangulum GHM medium proportionale eſſe inter figuras R & S. *a* Fiat altitudo NH æqualis radio RB & baſis HO æqualis perimetro EDF, & iungantur rectæ NM & GO. Quoniam in ſimilibus figuris regularibus vel in ſectoribus ſimilibus aut circulis R & S *b* vt radius

a prop. 3. lib. 1.

b ex pr. 14. hu.

dius RB ad radium SE, ita eſt perimeter ABC ad perimetrum DEF: eſtque NH æqualis RB & GH æqualis SE; atque HM æqualis perimetro ABC nec non HO æqualis
c prop. 3. lib. 3. DEF. *c* Ergo vt NH ad GH, ita eſt MH ad HO; ſed *d* vt altitudo N
d ex pr. 1. lib 4. H ad GH, ita eſt triangulum NHM ad GHM (cùm habeant eandem baſim HM); & *e* vt baſis MH ad
e prop. 1. lib. 4. baſim HO, ſeu *f* vt NH ad GH,
f prop. 7. lib. 3. ita eſt triangulum GHM ad triangulum GHO. Ergo triangulum GHM medium proportionale eſt inter duo triangula NHM, & GH
g ex pr. 13. hu. O; eſt *g* verò triangulum rectangulum NHM æquale figuræ R, cùm contineatur à radio, & perimetro dictæ figuræ R: pariterque triangulum GHO eſt æquale figuræ S: Igitur *h* vt figura R ad triangulum G
h pr. 3. lib. 3. HN, ita eſt triangulum GHM ad figurã S, & propterea triangulũ GH M mediũ proportionale eſt inter figuras R & S. Quod erat oſtendendũ.

EVCL. 47. I. 31 VI. PROPOSITIO XVIII. *In triangulis rectangulis qualibet figura rectilinea, vel circularis ſuper hypothenuſa deſcripta æqualis eſt duabus figuris ſuper lateribus rectum angulum continentibus deſcriptis, quæ illæ ſimiles ſint, & ſimiliter poſita.* Tab. VI. Figura 6.

Sit triangulum ABC rectangulum in A & ſuper tribus eius lateribus de-

deſcribantur quælibet tres figuræ X, R & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ, ſiue ſint circuli, ſiue ſectores, ſiue ſegmenta, ſiue zonæ, ſiue figuræ rectilineæ. Oſtendendum eſt figuram X ſuper hypothenuſam BC deſcriptam æqualem eſſe duabus figuris R & S illis ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis ſuper lateribus BA & AC. Ducatur *a* ab angulo recto A perpendicularis AD ſuper BC. Manifeſtum eſt *b* C B ad BD duplicatam rationem habere eius, quam habet CB ad BA; pariterque BC ad CD duplicatam rationem habebit eius, quam habet BC ad CA. Et quoniam *c* X ad R (cùm ſint figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ) duplicatam rationem habet lateris BC ad eius homologum BA: Ergo *d* X ad R eſt, vt CB ad BD. Eadem ratione figura X ad figurã S eandem proportionem habebit, quã BC ad CD: Ergo *e* figura X ad duas figuras R & S eandem rationem habebit, quam BC ad duas BD & DC ſimul ſumptas; ſed BC æqualis eſt duabus BD & DC. Ergo *f* figura X æqualis eſt duabus figuris R & S ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

a prop. 11. l. 1.
b prop. 9. lib. 4. & pr. 19. lib. 3
c pr. 17. lib. 4.
d ex pr. 19. l. 3.
e ex pr. 22. lib. 3
f ex pr. 16. l. 3.

PROPOSITIO XIX. *Qualibet figura ſiue circularis ſiue rectilinea ſuper ſummam duarum rectarum deſcri-* EVCL. 4. l. II.

ſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper eis; vna cum duplo ſpatij medij proportionalis inter eaſdem. Tab. VI. Figura 7.

Super AB, BC & ſuper ambas in directum poſitas deſcriptæ ſint figuræ rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ, ſiue circuli, aut ſectores, vel zonæ R, S & M. Dico figuram M æqualem eſſe figuris R & S vna cum duplo ſpatij medij proportionalis inter R & S. Super diametro AC deſcribatur ſemicirculus in quo eleuata perpendiculari BD & coniunctis AD, DC ſuper eas deſcribantur figuræ X, Y & Z ſimiles & ſimiliter poſitæ prioribus R, S, M. Quoniam in triangulo ADC *a* rectangulo in D *b* qualibet figura M, ſuper hypothenuſa AC deſcripta, æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus X & Y ſuper lateribus AD & DC ſimiliter deſcriptis; ſed *c* in triangulo ABD rectangulo in B figura X ſuper hypothenuſa AD deſcripta æqualis eſt duabus figuris R & Z illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis ſuper lateribus AB & DB: pariterque in triangulo DBC rectangulo in B figura Y ſuper DC deſcripta æqualis eſt duabus figuris illi ſimilibus S & Z, & ſimiliter poſitis ſuper CB & DB. Ergo figura M æqualis eſt figuris illi ſimilibus, & ſimiliter poſitis R & S,

a prop. 20. l. 2.
b prop. 18. hu.
c prop. 18. hu.

&

& duplo figuræ Z. Eſtque figura Z media proportionalis inter R & S eo quod tres eorum radij vel latera homologa AB, BD, BC ſunt continuæ proportionalia. Ergo figura M æqualis eſt figuris R, S & duplo medij proportionalis Z inter R, S. Quod erat &c.

Corollarium Si duæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale duobus quadratis ex datis rectis, & duplo parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis contenti. Nam *d* quadrata ſunt figuræ ſimiles, cum ſint regulares: vnde ex hac propoſitione, quadratum M æquale erit duobus quadratis R & S vnà cum duplo quadrati Z; ſed *e* quadratum Z æquale eſt rectangulo parallelogrammo ABC (eò quòd perpendicularis BD media proportionalis eſt inter AB & BC). Ergo quadratum M ex aggregato æquale eſt duobus quadratis R & S ex rectis datis, vnà cum duplo rectanguli ABC ſub rectis datis contenti.

EVCL. 4.II.

d prop. 3. huius

e ex pr. 14. lib. 4

PROPOSITIO XX. *Si ſuper duabus rectis lineis, & ſuper earum differentia, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex differentia æqualis differentiæ duarum figurarum ex illis rectis & duplo ſpatij medij*

proportionalis inter eaſdem. Tabula VI. Fig. 8.

Sit recta AB maior, & BC minor, earunque differentia AC, & in ſemicirculo ADB deſcripto ſuper AB, eleuata ſit perpendicularis CD, & ducta DB, atque ſuper A B, BC, AC, BD, CD, deſcriptæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ vt in præcedenti propoſitione factum eſt erit (ex 9. l. 4.) BD media proportionalis inter AB & BC; & ideo (ex 18. l. 4.) figura Z erit media proportionalis inter figuras R & S. Dico figuram M ex differentia AC deſcriptam, æqualem eſſe exceſſui quo duæ figuræ R & S ſuperant duplum figuræ Z. Quoniam *a* figura R ex ſumma ipſarum AC & CB æqualis eſt ſummæ figurarum S, M, & duplo figuræ Y ex media proportionali inter AC & C B. Ergo addita communi figura S: erunt figuræ R & S ſimul ſumptæ, æquales figuræ M duplo figuræ Y, duplo figuræ S, ſimul ſumptis. Sed in *b* triangulo rectangulo BCD, duplũ figuræ Z ex hypothenuſa æquale eſt duplo figuræ S vnà cùm duplo figure Y. Igitur duæ figuræ R & S, ſimul ſumptæ, æquales ſunt figuræ M vnà cum duplo figuræ Z; & ablato communiter duplo figuræ Z: erit figura M ex differentia AC, æqualis

a prop. 19. hu.

b pr. 18. huius.

lis exceſſui duarum figurarum R & S ſupra duplum figuræ Z quæ eſt media proportionalis inter R & S. Quod erat oſtendendum.

Corollarium Manifeſtum eſt, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, eſſe quadratum, ſuper differentia datarum linearum deſcriptum, æquale differentiæ inter duo quadrata ſuper eiſdem lineis deſcripta, & duplum parallelogrammi rectanguli ſub datis rectis lineis contenti. EVCL. 7. II.

Nam ex hac propoſitione quadratum M æquale eſt exceſſui duorum ei ſimilium quadratorũ R & S ſupra duplum quadrati Z; ſed *c* quadratum Z æquale eſt rectangulo A BC (eo quod *d* DB media proportionalis eſt inter rectas AB & BC propter perpendicularem DC) Ergo quadratũm M æquale eſt exceſſui quadratorum R & S ſupra duplum rectanguli ABC.

c ex pr. 14. lib. 4

d prop. 9 lib. 4.

PROPOSITIO XXI. *Si ſuper duabus rectis, & ſuper aggregato, & differentia earundem rectarum linearum deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſita; erit figura ex aggregato æqualis figuræ ex differentia vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſuper inæquales rectas deſcriptas.* Tab. VI. Fig. 9.

Sit rurſus recta linea AB maior, & BC minor, & ſit BD æqualis minori BC; erit AC aggregatum, & differentia AD, ſitque BE media proportionalis inter AB & BC, & ſuper eas deſcriptæ ſint figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ R, S, M, N & Z. Dico figuram M ex aggregato æqualem eſſe figuræ N ex differentia, vnà cum quadruplo figuræ Z quæ eſt media proportionalis inter figuras R & S. Quoniam *a* figura M ex aggregato ipſarum AB & BC æqualis eſt figuris R & S cum duplo figuræ Z; atque *b* duæ figuræ R & S æquales ſunt figuræ N ex differentia AD vnà cum duplo figuræ Z. Ergo figura M æqualis eſt figuræ N, & quadruplo figuræ Z, ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

a *prop. 19. hu.*
b *prop. 20. hu.*

EVCL. 8. II. *Corollarium* Manifeſtum eſt, quòd ſi dictæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale quadrato ex differentia datarum linearum deſcripto, vnà cum quadruplo paralellogrammi rectanguli ſub inæqualibus rectis datis contenti. Nam quadrata R, S, N, M & Z ſunt figuræ ſimiles; & ideo (ex hac propoſitione) quadratum M æquale erit quadrato N vnà cum quadruplo quadrati Z mediæ proportionalis BE inter inæquales rectas AB & BC,

BC; eſtque *c* parallelogrammum rectangulum ABC æquale quadrato Z. Ergo quadratum M æquale eſt quadrato N vnà cum quadruplo rectanguli ABC. *c ex prop. 14 lib. 4.*

PROPOSITIO XXII. ***Si ſuper duas rectas lineas inæquales, atque ſuper media proportionali inter aggregatum, differentiamque earundem, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ; erit differentia figurarum ex inæqualibus rectis lineis deſcriptarum æqualis figura ex illa media proportionali deſcripta.*** Tabula VI. Fig. 10.

Sint duæ rectæ AB maior, & eius portio AC, & *a* ipſi AC addatur DA æqualis maiori AB, erit D C ſumma, & CB differentia ipſarum AB & AC; ponaturque *b* CE in ſemicirculo BED perpendicularis & media proportionalis inter D C & CB; & ſuper AB, AC, CE deſcriptæ ſupponantur figuræ R, S & M circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico exceſſum figuræ R ſupra figuram S æqualem eſſe figuræ M, coniungatur recta AE ſuper quam deſcribatur figura O ſimilis & ſimiliter poſita ac ſunt R, S & M. Et quia *c* in triangulo AEC rectangulo in C figura O æqualis eſt figuris S & M ſimul ſumptis; ſuntque radij circuli AB,

a prop. 3 lib. 1.

b prop. 10. l. 4.

c prop. 18. huius

deſcriptæ fuerint quælibet circulares, vel rectilineæ figuræ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erunt duæ figuræ ex aggregato, & ex differentia, ſimul ſumptæ, æquales duplo figurarum ab inæqualibus lineis datis deſcriptarum

Tabula VI. Fig. 11.

Super duabus rectis lineis inæqualibus AB & BC, & earum aggregato AC, earumque differentia AD ſint deſcriptæ quælibet circulares, aut rectilineæ inter ſe ſimiles figuræ, & ſimiliter poſitæ R, S, M & N. Dico duas figuras M ex aggregato, & N ex differentia datarum, ſimul ſumptas, æquales eſſe duplo figuræ R vnà cum duplo figuræ S, ex datis lineis deſcriptarum. Quoniam *a* figura M æqualis eſt figuræ N vnà cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter R & S: Ergo addita communiter figura N, erunt figuræ M & N æquales ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N, & quadruplo medij proportionalis inter figuras R & S; ſunt *b* verò figuræ R & S ex inæqualibus rectis AB, BC deſcriptæ æquales figuræ N ex differentia vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R & S: Ergo duplum figuræ R, vnà cum duplo figuræ S æquale eſt ijſdem ſex ſpatijs, ſcilicet duplo figuræ N vnà cum quadruplo medij proportionalis inter figuras R & S. Quare figuræ

a prop. 21. hu.

b prop. 20. hu.

ræ M & N ex aggregato, & differentia deſcriptæ æquales ſunt duplo figuræ R vna cum duplo figuræ S, quæ ex inæqualibus datis rectis AB & BC deſcribuntur. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 4.XIII. PROPOSITIO XXIV. *Si ſuper tota, & ſuper ſegmentis rectæ lineæ extrema, ac media ratione diuiſæ deſcriptæ fuerit figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitæ, quæ ex tota, & minori ſegmento vtraque ſimul triplæ ſunt figuræ ex maiori ſegmento deſcriptæ. Et è conuerſo.* Tabula VI. Fig. 12.

Sit recta AB ſecta extrema, & media ratione in C, cuius ſegmentum maius AC: & deſcriptæ ſint ſuper AB, AC & CB tres circulares, aut rectilineæ figuræ R, M & S inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram R ex tota, vna cum figura S, ex minori ſegmento, triplas eſſe figuræ M ex maiori ſegmento deſcriptæ. Quoniam ſuper duas rectas inæquales AB & BC, atque earum differentiam AC deſcriptæ ſunt tres figuræ R, S & M ſimiles, & ſimiliter poſitæ: Ergo *a* duæ figuræ R & S ſuper inæqualibus rectis AB, BC deſcriptæ æquales ſunt figuræ M ex differentia AC, vnà cum duplo ſpatij medij proportionalis inter figuras R & S: Eſtque *b* figura M media

a pr. 20 huius.

b ex pr. 28. l. 4.

dia proportionalis inter figuras R & S ei ſimiles; propterea quod tres rectæ AB, AC, CB proportionales ſunt. Ergo figuræ R & S æquales ſunt triplo figuræ M.

Secundò ſint figuræ R & S ex tota AB, & minori ſegmento CB, ſimul ſumptæ, triplæ figuræ M illis ſimili, & ſimiliter poſitæ ex maiori ſegmento AC. Dico rectam AB ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Quoniam *c* duæ figuræ R & S æquales ſunt figuræ M, ex differentia, vna cum duplo medij proportionalis inter R & S; erant autem duæ figuræ R & S æquales triplo figuræ M: Ergo triplum figuræ M æquale eſt figuræ M, vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R & S; & ablata communi figura M, erit duplum figuræ M æquale duplo medij proportionalis inter figuras R & S; ideoque figura M æqualis erit ſpatio medio proportionali inter figuras ei ſimiles R & S. Quare *d* figurarum R, M, S tria homologa latera AB, AC & CB proportionalia erunt; & *e* propterea recta AB ſecta erit in C extrema, & media ratione. Vt erat propoſitum.

c pr. 20 huius.

d ex pr. 18. l. 4.

e prop. 5. lib. 4.

PROPOSITIO XXV. *Si ſuper aggregato totius & minoris ſegmenti, atque ſuper maiori ſegmento recta linea*

EVCL. 6. XIII.

cta extrema, ac media ratione diuiſæ, deſcriptæ fuerint figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, quæ ex aggregato deſcribitur figura quintupla eſt eius, quæ ex maiori ſegmento deſcribitur. Et è conuerſo. Tabula VI. Fig. 13.

Sit recta linea AB ſecta extrema, & media ratione in C, cuius ſegmentum minus CB; producaturque BD æqualis minori ſegmento CB; atque ſuper AD aggregato duarum AB & BC, atque ſuper differentia earum, ſeu maiori ſegmento AC, factæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ R & M inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram R quintuplam eſſe figuræ M. Quoniam *a* figura R ex AD

a pr.21. *huius.* aggregato inæqualium rectarum A B & BD, ſeu BC, æqualis eſt figuræ M ex AC illarum differentia vna cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſuper inæquales AB & BC, quæ ſimiles ſint, & ſimiliter poſitæ ipſis R & M. Eſt-

b ex pr. 28.lib.4 que *b* figura M media proportionalis inter figuras ei ſimiles ſuper AB & BC ſimiliter deſcriptas (cùm recta AC media proportionalis ſit poſita inter AB & BC). Ergo figura R quintupla eſt figuræ M.

Secundò ſit figura R ſuper aggregato totius AB, & ſegmento CB deſcripta, quintupla figuræ M ſimilis

ipſi

ipſi R, quæ ſuper earum differentia AC ſimiliter deſcribitur. Dico rectam AB ſectam eſſe extrema, & media ratione in C, cuius minus ſegmentum erit CB. Quoniam *c* figura R ex aggregato deſcripta æqualis eſt figuræ M ex differentia vna cum quadruplo ſpatij medij proportionalis inter figuras ſimiles eis, & ſimiliter poſitas ſuper rectas AB & BC; & ex hypotheſi figura R æqualis eſt quintuplo figuræ M: Ergo quintuplum figuræ M æquale eſt figuræ M vnà cum quadruplo dicti ſpatij medij proportionalis; & ablata communi figura M: erit quadruplum figuræ M æquale quadruplo dicti ſpatij medij proportionalis; ideoque figura M æqualis erit ſpatio medio proportionali inter figuras ei ſimiles ſuper AB & BC ſimiliter deſcriptas; proptereaque *d* tres rectæ BA, AC & CB proportionales erunt; & *e* AB ſecta erit in C extrema, & media ratione. Quod erat oſtendendum.

c prop. 21. hu.

d ex pr. 18. l. 4.
e pr. 25 lib. 4.

PROPOSITIO XXVI. *Si ſuper aggregato minoris, & ſemiſſis maioris, atque ſuper ſemiſſe maioris ſegmentorum eiuſdem recta linea extrema, ac media ratione diuiſæ, deſcriptæ fuerint duæ circulares; aut rectilineæ figuræ inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ; quæ ex aggregato deſcri-*

EVCL. 3 XIII.

deſcribitur figura quintupla eſt eius, qua ex ſemiſſe maioris ſegmenti deſcribitur. Et e conuerſo. Tabula VI. Figura 14.

Sit tota recta BA ad AC, vt AC ad minus ſegmentum CB; & secta ſit AC bifariam in D; atque ſuper BD aggregato ſegmenti minoris B C & DC ſemiſſe maioris; nec non ſuper DC ſemiſſe maioris deſcriptæ ſupponantur quælibet figuræ R & M circulares, vel recti lineæ ſimiles inter ſe & ſimiliter poſitæ. Dico figuram R quintuplam eſſe figuræ M. Secetur *a* CB bifariam in E. Et quia *b* DC ad CE eſt, vt AC duplum primæ ad CB duplum ſecundæ; & eſt AB ſecta in C extrema, & media ratione. Ergo *c* DE quoque in C ſecatur extrema, & media ratione, cuius ſegmentum minus erit CE. Cumque ſint deſcriptæ duæ figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, R quidem ſuper DB aggregato totius DE & EB, ſeu E C minoris ſegmenti; atque figura M ſuper maiori ſegmento DC. Ergo *d* figura R quintupla eſt figuræ M. Quod erat primum.

a prop. 9 lib. 1.
b prop. 11. l. 1.
c pr. 25. huius.
d pr. 25 huius.

Secundò ſit figura R, ſuper DB aggregato ſegmenti minoris CB, & DC deſcripta, quintupla figuræ M illi ſimili ſuper DC ſemiſſe maioris ſegmenti AC ſimiliter deſcriptæ. Dico rectam totam AB ſectam eſſe

in

in C extrema, & media ratione. Secta *e* CB bifariam in E. Quia figura R ſuper aggregato totius D E, & minoris ſegmenti CE, ſeu E B deſcripta, quintupla ponitur figuræ M, ſimili priori, ſuper maiori ſegmento DC ſimiliter deſcriptæ. Ergo *f* recta DE in C ſecatur extrema, & media ratione; ſed, *g* vt DC ad CE, ita eſt AC dupla primæ ad CB duplam ſecundæ. Ergo *h* recta AB quoque ſecatur in C extrema, & media ratione, cuius ſegmentum minus eſt CB. Quod erat oſtendendum.

e prop. 9. lib. 1.
f pr. 25. huius.
g prop. 15. lib. 5.
h prop. 40. lib. 5.

PROPOSITIO XXVII. *Si ſuper aggregato ſemiſſis totius, eiuſque ſegmenti maioris atque, ſuper eadem ſemiſſe recta lineæ diuiſa extrema, ac media ratione, deſcripta ſint duæ qualibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitæ; quæ ex aggregato deſcribitur figura, quintupla eſt eius, quæ ex ſemiſſe totius deſcribitur, figura. Et è contra.* Tab. VI. Fig. 15.

EVCL. 1. XIII.

Sit recta linea AB ſecta in C extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius AC; & producta ſit AD æqualis medietati totius AB; atque ſuper DC aggregato ſegmenti maioris AC & DA ſemiſſe totius, nec non ſuper DA ſemiſſe totius deſcriptæ ſupponantur duæ figuræ

circu-

circulares, vel rectilineæ R & M ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitę. Dico figuram R ex aggregato quintuplam eſſe figuræ M ex ſemiſſe totius deſcriptæ. Secetur *a* A C bifariam in E, & quia *b* DA ad AE eſt, vt BA duplum primæ ad AC duplum ſecundæ; eſtque AB ſecta in C extrema, ac media ratione. Ergo *c* DE quoque in A extrema, ac media ratione ſecatur, cuius ſegmentum minus eſt AE; Cùmque duæ figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, R quidem deſcripta eſt ſuper aggregato totius DE, eiuſque minoris ſegmenti EC, vel AE; & figura M deſcripta eſt ſuper eius maiori ſegmento DA. Ergo *d* figura R quintupla eſt figuræ M. Quod erat primum.

a prop. 9. l. 1.
b prop. 11. l. 1.
c prop. 26. l. 4.
d prop. 25. huius.

Secundò figura R ſuper DC aggregato ipſius DA ſemiſſis totius A B, & ſegmenti maioris AC deſcripta, quintupla ſit figuræ M illi ſimili ſuper DA ſemiſſe totius AB ſimiliter deſcriptæ. Dico totam rectam lineam AB ſectam eſſe in C extrema, & media ratione. Secetur *e* A C bifariam in E. Et quoniam figura R ſuper DC aggregato totius D E, eiuſque ſegmenti minoris EC, vel AE deſcripta, quintupla eſt figuræ M ei ſimili ſuper differentia, vel maiori ſegmento D A deſcriptæ: Ergo *f* DE ſecatur in A extrema, &

e prop. 9 lib. 1.
f prop. 25. huius.

me-

media ratione; ſed, g vt DA ad A E, ita eſt BA dupla primæ ad AC duplam ſecundæ. Ergo h ſimiliter recta AB ſecatur in C extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum eſt AC. Quod erat oſtendendum.

g prop. 11. l. 3.
h prop. 26. lib. 4

PROPOSITIO XXVIII. *Si ſuper tribus lateribus trianguli ambligonij, atque ſuper media proportionali inter latus circa angulum obtuſum, eiuſque productionem vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere obtuſum angulum ſubtendente æqualis ſummæ figurarum ex reliquis lateribus, vnà cum duplo figuræ ex illa media proportionali deſcriptæ.* Tabula VI. Figura 16.

In triangulo ABC ſit angulus C BA obtuſus, & a ab angulo C ducta CD perpendiculari ſupra AB ſecante eam in D. Patet b perpendicularem CD cadere extra triangulum ad partes acuti anguli CBD; & ſiat c BE media proportionalis inter AB & BD, & ſuper lateribus AC, BC, AB, BE, AD, BD & CD deſcriptæ ſint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ X, S, R, Y, M, Z & N inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figurã X latere ex ſubtendente

a prop. 11. l. 1.
b expr. 18. l. 3.
c prop. 10. l. 4.

te

te obtuſum angulum deſcriptam, æqualem eſſe duabus figuris R & S ex lateribus continentibus angulum obtuſum, vnà cum duplo figuræ Y ex BE media proportionali inter A B & BD. Quia in triangulo ADC

d prop. 18. hu. rectus eſt angulus D. Ergo *d* figura X æqualis eſt duabus figuris M & N;

e prop. 19. l. 1. ſed figura *e* M ex AD aggregato rectarum AB & BD æqualis eſt duabus figuris R & Z ex eiſdem rectis deſcriptis, vnà cum duplo figuræ Y, ex media proportionali inter AB & BD. Ergo figura X æqualis eſt figuris R, Z & N cum duplo figuræ Y:

f prop. 18. hu. Sed *f* figura S æqualis eſt duabus figuris Z & N (propterea quod in triangulo CBD rectus eſt angulus D): Ergo figura X æqualis eſt duabus figuris R & S vna cum duplo figuræ Y ex media proportionali inter latus AB, & productionem eius BD vſque ad perpendicularem C D. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 12. II. *Corollarium* Manifeſtum eſt, ſi dictæ figuræ fuerint quadrata eſſe quadratum ex latere ſubtendente angulum obtuſum æquale duobus quadratis ex lateribus dictum obtuſum angulum ambientibus, vnà cum duplo parallelogrammi rectanguli ſub vno latere circa obtuſum angulum, & ſub eius productione vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem. Nam

Nam *g* parallelogrammum rectangulum ABD æquale eſt quadrato Y ex BE media proportionali inter A B & BD, eſtque quadratum X æquale quadratis R & S duplo quadrati Y (ex hac propoſitione, cum quadrata ſint inter ſe ſimilia): Ergo quadratum X æquale eſt quadratis R & S, & duplo rectanguli parallelogrammi ABD.

g Cor. 2 prop. 14. lib. 4.

PROPOSITIO XXIX. *Si ſuper tribus lateribus cuiuslibet trianguli, atque ſuper media proportionali inter latus circa angulum acutum, eiuſque ſegmentum vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, deſcriptæ fuerint qualibet figuræ circulares, vel rectilineæ ſimiles inter ſe, & ſimiliter poſitæ; erit figura ex latere acutum angulum ſubtendente æqualis exceſſui duarum figurarum ex lateribus eundem acutum angulum continentibus ſupra duplum figuræ ex illa media proportionali.* Tabula VI. Fig. 17.

In triangulo ABC ſit angulus B acutus; & ſuper *a* latus AB acutum angulum continens cadat ab oppoſito angulo C perpendicularis CD, ſecans *b* latus AB ad partes acuti anguli in D & *c* BE ſit media proportionalis inter BA & BD, & ſuper A C, AB, BC, EB, AD, DB & CD fiant figuræ qualibet X, R, S, M, Z, Y &

a prop. 11. l. 1.
b prop. 18. l. 1.
c pr. 10. lib. 4.

 Y &

Y & N circulares, vel rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram X ex latere ſubtendente angulum acutum B, æqualem eſſe exceſſui duarum figurarum R & S ex lateribus acutũ angulũcontinentibus ſupra duplũ figuræ Y ex media proportionali EB. Quoniam *d* in triangulo ACD rectus eſt angulus D. Ergo figura X æqualis eſt figuris M & N; & figura X cum duplo figuræ Y, erit æqualis figuris M & N cum duplo figuræ Y; ſed figuris R, Z æqualis eſt figura M ex differentia laterum AB, DB, cum duplo figuræ Y ex media proportionali. Ergo figura *e* X vnà cum duplo figuræ Y æquatur tribus figuris N, R & Z; eſt verò *f* figura S æqualis figuris N & Z (cum in triangulo CDB angulus D rectus ſit). Igitur figura X vna cum duplo figuræ Y æqualis eſt duabus figuris R & S, & ablato communiter duplo figuræ Y: erit figura X æqualis exceſſui figurarum R & S ſupra duplum figuræ Y. Vt fuit propoſitum.

d pr. 18. huius.

e pr. 20. huius.

f pr. 18. huius.

EVCL. 13. II. ***Corollarium*** Manifeſtum eſt, ſi dictæ fiuræ fuerint quadrata, eſſe quadratum lateris acutum angulum ſubtendentis æquale exceſſui duorum quadratorum laterum acutum angulum continentium ſupra duplum parallelogrammi rectanguli ſub vno late-

latere circa angulum acutum, & ſub eius ſegmento ab eodem acuto angulo vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, contenti. Nam *g* parallelogrammum rectangulum ABD æquale eſt quadrato Y ex media proportionali inter AB & BD. Ergo ex hac propoſitione quadratum X æqualæ eſt differentiæ duorum quadratorum R & S à duplo parallelogrammi rectanguli ABD. *g Cor. 2 prop. 14. lib. 4*

PROPOSITIO XXX. *Si ſuper circuli diametro, & ſuper lateribus trianguli, quadrati & hexagoni regularium in eodem circulo inſcriptorum deſcribantur quælibet figuræ circulares vel rectilineæ ſimiles & ſimiliter poſitæ; Erit figura ex diametro ſexquitertia figuræ ex latere trianguli, dupla figura ex latere quadrati, quadrupla figuræ ex latere hexagoni; & figura ex latere trianguli tripla erit figuræ ex latere hexagoni, ſexquialtera figura ex latere quadrati; & hæc dupla erit figura ex latere hexagoni.* Tab. VI. Fig. 18. EVCL. 12. XIII.

In circulo cuius diameter AE inſcriptæ ſint regulares figuræ triangulum cuius latus AB, quadratum cuius latus AI & hæxagonum cuius latus BE æquale circuli radio DE; & ſuper ea deſcribantur quælibet figuræ circulares vel rectilineæ ſimi-

les & ſimiliter poſita K, M, O & N. Dico primum figuram K ſexquitertiam eſſe figuræ M, duplam figuræ O, & quadruplam figuræ N. Quia ſemicirculi ABE, ACE æquales ſunt, pariterque arcus *a* AB, AC ſubtenſi à leteribus trianguli æquilateri ſunt æquales; ergo reſidui arcus BE & EC ſunt æquales, & quilibet ſexta pars eſt totius periphæriæ circuli; & ideo recta BC *b* bifariam & perpendiculariter ſecatur à diametro AE in H. In ſuper quia BE eſt latus hæxagoni circulo inſcripti cum ſubtendat ſextam circuli partem, & *c* eſt æqualis radijs DB, DE erit DBE triangulum æquilaterum cuius baſis DE à perperpendiculari BH bifariam ſecabitur. Quare diameter AE ad HE erit vt 4 ad 1, & AE ad AH erit vt 4 ad 3. Sed figura *d* K ad figuram ei ſimilem M eſt vt EA ad AH. Ergo figura K ad M eſt vt 4 ad 3; & figura K ad N eſt vt AE ad EH ſeu vt 4 ad 1. Poſtea quia arcus AI quadrans eſt peripheriæ circuli totius erit angulus ADI rectus. Ergo ſicuti diameter *e* EA dupla eſt radij DA ita figura *f* K dupla erit figuræ O ei ſimilis deſcriptæ ſupér media proportionali IA inter illas.

a prop.3 huius.
b pr.19. lib. 2.
c pr.8. huius.
d prop.9 17. l.4.
e ex pr. 3.huius
f ex pr. 9 & 17 lib. 4.

Secundo Dico figuram M eſſe ſexquialteram ipſius O, & triplam figuræ N, quia figura M ad K erat

vt

vt 3 ad 4 & K ad O oſtenſa fuit vt 4 ad 2 nempe dupla ergo *g* figura M ad ad O erit vt 3 ad 2 & K ad N fuit vt 4 ad 1. Igitur M ad N erit vt 3 ad 1. *g prop. 19. l. 3.*

Tertio Dico figuram O duplam eſſe figuræ N. Quia O ad K fuit vt 2 ad 4 & K ad N vt 4 ad 1. ergo *h* O ad N erit vt 2. ad 1. quoque &c. *h prop. 19. l. 3.*

PROPOSITIO XXXI. *Si ſuper lateribus pentagoni, hexagoni, & decagoni regularium ab eodem circulo comprehenſorum fiant qualibet figuræ circulares, aut rectilineæ ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere pentagoni æqualis duabus figuris ſimul ſumptis ex latere hexagoni, & ex latere decagoni deſcriptis:* Tabula VI. Fig. 19. EVCL. 10. XIII

In circulo ACB ſit AB latus inſcripti pentagoni, EA latus inſcripti decagoni regularium, & radius DB erit latus inſcripti hexagoni, & ſuper his lateribus *a* deſcriptæ ſint qualibet circulares, vel rectilineæ figuræ ſimiles, & ſimiliter poſitæ, M quidem ſuper AB, R ſuper DB, & S ſuper EA. Dico figuram M æqualem eſſe duabus figuris R, & S ſimul ſumptis. *a ex pr. 3. huius*

Secetur *b* arcus AE ſubtenſus à latere decagoni bifariam in H, ſicuti *c* arcus AB in E ſectus fuerat bifariam; eritque arcus AH quar- *b ex pr. 19. l. 2.* *c ex pr. 3. hu.*

ta pars arcus AB, & tertia pars arcus BH, & iungatur radius DH ſecans *d* bifariam, & perpendiculariter latus decagoni in O & AB in K: iunganturque EK, BE & diameter AC. Quoniam in triangulis AOK & EOK circa angulos rectos æquales ad O ſunt duo latera AO & EO æqualia & OK commune. Ergo *e* angulus KEO æqualis eſt angulo KAO & *f* æquales quoque ſunt anguli EBA & EAB, cum inſiſtant peripherijs æqualibus EA, BE, ergo anguli AEK, ABE æquales ſunt, eſtque angulus BAE communis in triangulis BEA, EKA: Ergo *g* inter ſe ſunt ſimilia. Quare BA, ad AE erit, vt EA ad AK, ideoque *h* figura M ad ei ſimilem, & ſimiliter poſitam figuram S erit vt BA ad AK. Rurſus quia, vt arcus EA *i* decima pars eſt totius peripheriæ ABCA, ita arcus *l* AH ſemiſſis illius decima pars eſt ſemiperipheriæ ABC; & eſt arcus BH triplus arcus AH. Ergo qualium partium arcus ABC eſt decem erit BH tres, & BC ſex partes; ideoque arcus BC duplus erit ipſius arcus BH; & *m* angulus CDB duplus erit anguli BDH; ſed *n* angulus CDB ad centrum duplus eſt anguli BAC ad peripheriam: Ergo anguli BDH & DAB æquales inter ſe ſunt; & angulus B eſt communis. Ergo *o* duo triangu-

d prop. 29. lib. 2

e prop. 4. lib. 1.

f prop. 27. lib. 2

g ex pr. 4. l. 4.

h ex pr. 17. lib. 4

i ex pr. 3. huius

l prop. 10. lib. 3

m ex pr. 17. l. 2.

n prop. 23. l. 2.

o ex pr. 4. l. 4.

la

la ABD & DBK ſimilia ſunt; propterea que AB ad BD erit, vt DB ad BK. Vnde *p* figura M ad ei ſimilem, & ſimiliter poſitam figuram R erit, vt AB ad BK; erat autem figura eadem M ad figuram S, vt eadem recta AB ad AK. Ergo *q* figura M ad ambas figuras R & S ſimul ſumptas erit, vt recta BA ad rectas BK & AK ſimul ſumptas; eſtque BA æqualis duabus BK, KA. Ergo *r* figura M ex latere pentagoni æqualis eſt duabus figuris R ex latere hexagoni, & S ex latere decagoni ſimul ſumptis. Quod erat oſtendendum.

p *ex pr* 17. *l.* 4

q *ex pr* 22. *l.* 3.

r *ex pr.* 16. *l.* 3.

Finis Libri quinti.

LIBER VI.

De Solidis,

DEFINITIONES.

I. *Solidum ſiue corpus, eſt, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet, cuius extrema ſunt ſuperficies.*

II. *Solidus angulus eſt concurſus plurium, quàm duorum angulorum planorum, non in eodem plano conſiſtentium ad vnum punctum.* Tab. VI. Fig. 20.

Vt ſi fuerint plures, quàm duæ rectæ AD, BD, CD, concurrentes in D, & non in eodem plano iacentes, anguli plani ADB, BDC & CDA, non in eodem plano exiſtentes, & concurrentes in D, efficiunt angulum ſolidum D. Et ſiquidem anguli plani conſtituentes ſolidum angulum D fuerint tres vocabitur talis ſolidus angulus triangularis, ſi quatuor quadrangularis, & ſic vlterius.

III. *Solida rectilinea, quæ æquiangula inter ſe ſunt, & omnia latera circa angulos ſolidos æquales proportionalia habent: vocentur* Similia.

IV. *Solida figura genita ex reuolutione ſemicirculi circa diametrum eius quieſcentem, quouſque redeat ad locum, à quo moueri cæperat; vocetur* Sphera. *Et diameter quieſcens, vocetur* Axis

Axis ſphæræ. *Et centrum ſphæræ erit idem, quod ſemicirculi*. Diameter *ſphæræ eſt qualibet recta per centrum ſphæræ extenſa*. *Circulus* maximus *ſphæræ eſt ille, qui per centrum ſphæræ tranſit: reliqui vero minores*. Hemiſphærium *autem vocetur dimidium ſphæræ diſſecta à circulo maximo*.

POSTVLATA.

Per quamlibet rectam lineam planum, ſeu ſuperficiem planam ducere. I.

Et quodlibet planum indefinitè producere. II.

AXIOMATA.

Duo plana non habent ſegmentum commune. I.

Duo plana ſolidam figuram non comprehendunt. II.

Duorum planorum communis ſectio linea eſt. Et eadem linea iacens tota in duabus ſuperficiebus diſtinctis, erit earum communis ſectio, vel contactus. III.

Eiuſdem rectæ lineæ, cuius duo puncta, aut pars eius iacent in ſubiecto plano, pars reliqua in ſublimi eſſe non poteſt. IV. EVCL. p. 1. XI.

Exigit enim *a* natura planæ ſuperficiei, vt illi omnino, & vndequaque congruat recta linea, quod tunc verificatur, quando omnia b *Def.* 5. *l.* 1.

puncta lineæ rectæ contingunt planam ſuperficiem.

V. EVCL. pr. 2. XI *Duæ rectæ ſe ſecantes in vno ſunt plano* Tabula VI. Fig. 21.

Sint enim duæ rectæ lineæ AB & CD ſe ſecantes in E, patet ipſarum vnam, vt AB in vno plano AH intelligi poſſe collocatam, & ſi concipiatur planum AH circa rectam AB circunduci, neceſſariò in aliquo loco reuolutionis ipſius incidet in rectam CD ſaltem in aliquo puncto eius D præter punctum E; & tunc planum ipſum AH, quod per duo puncta D & E tranſit neceſſario per rectas DE & AB tranſibit, quandoquidem recta linea ED non poteſt planum ipſum contingere in duobus punctis D & E, & extra ipſum exiſtere.

EVCL. 3. XI. PROPOSITIO I. *Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio recta linea eſt.* Tabula VI. Figura 22.

Duo plana ABCD & EFG ſe ſecent *a* in linea NO. Dico lineam NO rectam eſſe. Sumantur duo quælibet puncta N & O, quæ in linea communis ſectionis exiſtant, ideſt iaceant in vtroque plano, & à puncto N ad O coniungatur recta linea. Quia *b* recta NO plano AC congruit, in quo puncta N & O exi-

a ax. 3. huius.

b Def. 5 lib. 1.

ſtunt

ſtunt, alias c non vndequaque plano AC congrueret recta linea. Pariter recta NO plano FG congruit, in quo pariter puncta N & O exiſtunt. Ergo recta NO in vtroque plano AC & FG iacet, eſtque communis ſectio eorundem planorum linea vnica (alias d plana ſe ſecantia haberent ſegmentum commune, aut e ſolidam figuram comprehenderent) ergo recta NO eſt communis ſectio eorundem planorum. Quare, &c. c ax. 4. huius. d ax. 1. huius. e ax. 2. huius.

PROPOSITIO II. *Si recta linea incidens in communem ſectionem duarum rectarum linearum perpendicularis fuerit ad vtranque, illa perpendicularis erit ad omnes rectas lineas a quibus illa tangitur, quæque in plano per duas illas rectas lineas ducto, exiſtunt: Vocetur talis recta ſublimis,* Erecta *ſeu Perpendicularis ad planum ſubiectum.* Tabula VI. Figura 23. EVCL. 4. XI.

Duæ rectæ lineæ CD, FE in plano MN exiſtentes ſe ſecent in puncto B, & ſublimis recta AB efficiat tam angulum ABC, quàm angulum ABF rectum; & ducatur à puncto B in plano NM quælibet recta BK, cadens intra quemlibet angulorum CBF. Dico rectam AB eſſe quoque perpendicularem ad rectam B K, ſecentur a GB & HB æquales a prop. 3. lib. 1.

inter ſe, iungaturque HG, ſecans BK in K, atque *b* HG ſecetur bifariam in O, coniunganturque rectæ OB, AG, AO, AK, AH. Quia in triangulis BOG, BOH latera GO, OH ſunt æqualia, OB commune & baſes GB, HB æquales ergo *c* anguli ad O ſunt æquales & ideo BO perpendicularis erit ad GH. Poſtea in triangulis AGB, AHB latera GB, HB ſunt æqualia & AB latus commune circa rectos angulos ABG & ABH. Ergo *d* baſes AG, AH æquales ſunt, & ideo vt prius *e* in triangulis, AOG, AOH latus commune AO perpendicularis erit ad GH bifariam ſectam in O. Poſtea quia in triangulo ABH rectangulo in B *f* quadrato AH æqualia ſunt duo quadrata AB & BH; ſuntque *g* quadrato BH æqualia duo quadrata BK, KH vna cum duplo rectanguli HKO. Ergo quadrato AH æqualia ſunt tria quadrata ipſarum HK, KB & BA, cum duplo rectanguli HKO. Similiter in triangulo AKH eidem *h* quadrato AH æqualia ſunt duo quadrata HK, KA cum duplo rectanguli HKO igitur tria quadrata HK, KB & BA cum duplo rectanguli HKO æqualia ſunt duobus quadratis HK & KA cum duplo rectanguli HKO, & ablatis communiter quadrato HK & duplo rectanguli HKO remanebunt duo qua-

b prop. 9. l. 1.
c prop. 7 lib. 1.
d prop. 4. lib. 1.
e prop. 7. lib. 1.
f prop. 18. l. 5.
g pr 28 29. l. 5.
h eadẽ

quadrata KB & BA æqualia quadrato KA; & propterea *i* angulus ABK rectus erit igitur AB perpendicularis eſt ad quamlibet EK occurrentem termino rectæ AB in plano MN. Quod erat &c. vocetur recta AB perpendicularis ad planum MN, quod per rectas CD, FE ducitur. *i ex pr. 29. l. 5.*

PROPOSITIO III. *Si recta linea incidens in communem ſectionem trium rectarum ad ſingulas perpendicularis fuerit: illæ tres rectæ lineæ in vno ſunt plano.* Tabula VI. Figura 24. EVCL. 5. XI.

Recta linea AB incidat in B, & efficiat cum tribus BC, BD, BE, ſe tangentibus in B, rectos angulos. Dico tres rectas BC, BD, BE in vno plano eſſe. Si enim BE non iacet in plano CH, quod per rectas CB & BD duci poteſt, producatur *a* planum HC quouſque ſecet *b* planum per rectas AB, BE extenſum in recta BG. Quoniam AB ponitur perpendicularis ad duas BC, BD; *c* Ergo AB perpendicularis eſt ad rectam BG poſitam in eodem plano per rectas BC, BD extenſo; ſed erat quoque AB perpendicularis ad BE, & iacet BE in plano ABG. Ergo duo anguli recti ABE & ABG æquales ſunt inter ſe, pars & totum; quod eſt impoſſibile. *a poſt. 2 huius. b prop. 1 huius. c prop. 2 huius.*

Non

Non ergo recta BE extra planum CH iacet; ideoque rectæ BC, BD, BE in vno ſunt plano. Quod erat oſtendendum.

EVCL. 8. & 18 XI.
PROPOSITIO IV. *Si in quolibet plano per rectam lineam ad ſubiectum planum perpendicularem extenſo, recta eidem perpendiculari parallela ducta fuerit: erit illa perpendicularis quoque ad planum ſubiectum. Vocetur autem ſublime planum Erectum, ſeu Perpendiculare ad planum ſubiectum.* Tabla VI. Fig. 25.

Sit recta CD perpendicularis ad planum EG, & per CD ductum ſit quodlibet planum CDB, & in eo ducta ſit AB parallela ipſi CD. Dico rectam AB ad idem planum EG perpendicularem eſſe. Iungatur recta BD, & in plano EG ducatur recta *a* HB perpendicularis ad rectam BD, & coniungantur rectæ HD, HC & BC. Quoniam recta CD perpendicularis eſt ad planum EG; Ergo *b* CD efficiet rectos angulos cum rectis lineis DB & HD in eodem plano extenſis ad terminum D; ideoque *c* in triangulo CHD rectangulo in D erit quadratum CH æquale duobus quadratis CD & DH; *d* ſed quadrato DH æqualia ſunt duo quadrata HB & BD (propterea quod angulus HBD rectus factus eſt). Igitur quadratum

a prop. 10. l. 1.
b prop. 2 huius.
c prop. 28. l. 5
d prop. 28. l. 5.

HC

HC æquale eſt tribus quadratis HB, BD & DC; eſt verò quadratum BC æquale duobus quadratis BD & DC (eo quod angulus CDB rectus eſt); Ergo quadratum HC æquale eſt duobus quadratis HB & BC; & propterea *e* in triangulo CBH angulus HBC rectus erit, ſed factus fuit angulus HBD rectus: Igitur recta HB perpendicularis eſt ad duas BD & BC; & *f* rectæ BC & BD iacent in eodem plano parallelarum AB & CD, in quo puncta B, C & D exiſtunt: Ergo *g* recta HB perpendicularis quoque eſt ad rectam BA, quæ in eodem plano CBD exiſtit. Eſt *h* etiam angulus ABD rectus, cùm reliquus internus CDB, & ad eaſdem partes parallelarum ſit quoque rectus: Ergo recta AB perpendicularis eſt ad duas rectas BD & BH concurrentes in B; Et propterea *i* AB perpendicularis erit ad planum EG, quod per rectas BD & BH ducitur. Quod erat oſtendendũ. Vocetur quodlibet planum CDB ductum per rectam CD perpendiculare ad ſubiectum planum, *Erectum*, ſeu Perpendiculare ad idem planum EG.

e ex pr. 29. l. 5.

f exiom 4. huius

g prop. 2. huius

h prop. 15. l. 2.

i prop. 2 huius.

Corollarium Recta linea duo puncta coniungens in duabus parallelis ſumpta in eodem plano parallelarum iacet. Sumpta enim fuerunt pun-

EVCLI. 7 XI.

puncta B, C in parallelis AB, CD, & oſtenſa fuit recta BC in plano parallelarum AB, CD iacere.

EVCL. 6. XI. PROPOSITIO V. *Si duæ rectæ ad idem planum perpendiculares fuerint, parallelæ erunt inter ſe.* Tabula VI. Figura 26.

Sint duæ rectæ BA & DC perpẽdiculares ad planumEG. Dico rectas BA & DC parallelas eſſe inter ſe. Si enim BA non eſt parallela DC, in *a* plano DCA, à puncto A ducatur AH parallela ipſi CD, & *b* per rectas AH & AB extendatur planum ſecans ſubiectum *c* planum EG in recta NAK. Et quia DC perpendicularis eſt ad planum EG: Ergo *d* ei parallela HA perpendicularis quoque erit ad planum EG: igitur *e* angulus HAK rectus erit; ſed BA perpendicularis quoque eſt ad planum EG. Ergo angulus BAK rectus quoque eſt; & ſunt anguli BAK & HAK in eodem plano BAK: igitur totus angulus BAK æqualis eſt angulo HAK ſuæ parti, quod eſt abſurdum. Non ergo alia recta, quàm BA eſſe poteſt, parallela ipſi DC. Quare patet propoſitum.

a 31. pr. 16. l. 1.
b poſt. 1 huius.
c prop. 1 huius.
d prop. 4. huius
e prop. 2 huius.

EVCL. *Def. 4. & prop. 38. & 13. XI.* *Corollarium* Conſtat ex his duabus propoſitionibus, quòd non poſſunt ambæ rectæ BA, HA ſe mutuo ſecantes perpendiculariter inſiſtere

ſuper

ſuper idem planum EG. Et in quolibet plano BAC ad ſubiectum planum EG erecto omnes rectæ lineæ, BA, DC quæ in eo exiſtentes perpendiculariter ad AC communem planorum ſectionem ducuntur, ſunt quoque perpendiculares ad ſubiectum planum. Et illa, quæ à puncto ſublimi B eiuſdem plani erecti ducitur perpendiculariter ad ſubiectum planum cadet in communem planorum ſectionem.

PROPOSITIO VI. *A dato puncto in ſublimi, aut in ſubiecto plano poſito, ducere rectam lineam perpendicularem ad ſubiectum planum.* Tabula VI. Fig. 27. 28. EVCL. 11. 12. *XI.*

Sit quodlibet planum EG: Debet à puncto A in dicto plano, aut in ſublimi poſito duci recta linea, quæ perpendicularis ſit ad ſubiectum planum EG. Per punctum A *a* ducatur quodlibet planum ABDC, ſecans *b* ſubiectum planum EG in recta BC, atque *c* in plano ABCD à puncto A ducatur AF perpendicularis ad rectam BC, & *d* in plano EG à puncto interſectionis rectarum BC, AF ducatur HK perpendicularis ad eandem BC; tandem in plano per rectas FA & HK *e* extenſo ducatur *f* à puncto A recta AO perpendicularis ad rectam HK. Dico AO perpendicularem eſſe ad planum

a poſt. 1. & pr. 1. huius. *b prop. 1. huius* *c prop. 10. & 11. l. 1.* *d prop. 10. l. 1* *e poſt. 2 huius.* *f prop. 10. & 11 lib. 1.*

num EG. Quoniam recta BC perpendicularis eſt ad duas rectas FA & HK ſe ſecantes primò in A, ſecundò in F: Ergo *g* recta BC perpendicularis eſt ad planum per rectas FA & HK ductum; atque *h* planum EG extenſum per eandemperpendicularem BC erit quoque erectum ad idem planum: ergo viciſſim planum per rectas FA, HK ductum perpendiculare erit ad planum EG; & recta AO exiſtens in plano per F A, HK extenſo ducitur perpendiculariter ad HK eorum communem ſectionem. Ergo *i* recta AO perpendicularis eſt ad planum EG; quod faciendum erat.

g prop. 2. huius

h prop. 4. huius

i coroll. prop. 5. huius.

PROPOSITIO VII. *Si duæ rectæ lineæ vni tertiæ parallelæ fuerint, non in eodem plano exiſtentes, inter ſe quoque parallelæ erunt.* Tab. VI. Figura 29.

EVCL 9. XI.

Sint rectæ AB & CD parallelæ eidem rectæ EF, & non ſint omnes in vnó plano. Dico rectas AB & C D inter ſe parallelas eſſe. A quolibet *a* puncto G rectæ EF ducantur in planis æquidiſtantium rectæ lineæ GH & GK perpendiculares ad eandem EF, quæ ſecent oppoſitas parallelas in H & K, & coniungatur recta HK. Quoniam eadem recta linea EG perpendicularis eſt ad duas rectas GH, GK; ergo *b* EG perpen-

a propr. 10. l. 4.

b prop. 2. huius

pen-

pendicularis eſt ad planum GHK; eſt vero AH parallela ipſi EG. Igitur *c* AH perpendicularis quoque eſt ad planum HGK. Eadem ratione CD æquidiſtans eidem EG perpendicularis quoque erit ad planum HGK; cumque duæ rectæ AH, & CK ſint perpendiculares ad planum HGK *d* erunt AH & CK inter ſe parallelæ. Quod erat oſtend, | *c prop. 4. huius* | *d prop. 5. huius*

PROPOSITIO VIII. *Si duo plana ſe mutuò ſecantia per duas parallelas ducta fuerint, efficient communem ſectionem vtrique ipſarum æquidiſtantem. Et ſi ambo plana perpendicularia fuerint ad ſubiectum planum; & communis eorum ſectio ad planum ſubiectum perpendicularis erit.* Tabula VI. Fig. 30. | EVCL. 19. XI.

Primò per duas rectas æquidiſtantes DC & FH ducta ſint duo plana AC, BF ſe ſecantia in recta linea AB. Dico AB parallelam eſſe vtrique ipſarum DC & FH: Si enim hoc verum non eſt, in duobus planis AC, AH à *a* puncto communi A ſectionis AB ducantur AO quidem parallela ipſi DC & AK parallela ipſi FH. Et quoniam AO, FH parallelæ ſunt eidem DC *b* erunt inter ſe parallelæ quoque; & fuit AK eidem FH parallela. Ergo *c* AO & AK parallelæ ſunt inter ſe, & ſe ſecant in A, *d* quod eſt impoſſibile. Non ergo alia recta linea præter AB com- | *a cor. pr. 16. l. 1.* | *b prop. 7. huius* | *c prop. 17. l. 1.* | *d ex pr. 14. l. 1.*

B communis planorum ſectionis, eſſe poteſt parallela vtrique æquidiſtantium DC, FH.

Secundò plana AC, AH perpendicularia ad ſubiectum planum EG, idque ſecantia in BC, BH ſe mutuo ſecent in recta AB. Dico AB perpendicularem eſſe ad planum E
c prop. 10. v. l; 11. l. 1. G. A quibuſlibet *e* punctis C & H in planis erectis ducantur perpendiculares CD, HF ad communes ſe-
f cor. pr 5. huius ctiones BC, BH: erunt *f* tam DC, quam HF perdendiculares ad planum ſubiectum EG; & propterea *g*
g prop. 5. huius DC & HF parallelæ erunt inter ſe; ideoque *h* per eas ducta plana AC,
h ex prima par. huius. BF efficient communem ſectionem AB parallelam cuilibet ipſarum C D; ſed erat DC perpendicularis ad planum ſubiectum; ergo AB plano-
i Prop. 4. huius rum *i* communis ſectio perpendicularis quoque erit ad ſubiectum planum EG, vt fuerat propoſitum.

EVCL. 14. XI. PROPOSITIO IX. *Si ad duo plana eadem recta linea perpendicularis fuerit, omnes rectæ lineæ inter ſe parallelæ ſectæ ab illis duobus planis, erunt æquales inter ſe. Vocentur illa duo plana parallela inter ſe.* Tabula VI. Fig. 31.

Sint duo plana AB & DC, & vna tantum linea MO perpendicularis ſit ad vtrumque planum, & duæ quælibet rectæ lineæ EF, GH pa-

ralle-

rallelæ inter ſe ſecentur vtrinque ab eiſdem planis in punctis E, F, G H. Dico rectas EF & GH æquales eſſe inter ſe. A punctis E & G *a* ducantur rectæ EK, GN perpendiculares ad reliquum planum CD, & coniungantur rectæ KF, NH, KN, FH & EG. Quoniam rectæ MO & EK perpendiculares ſunt ad planum CD: Ergo rectæ MO, EK *b* parallelæ ſunt inter ſe, & earum vna OM perpendicularis eſt ad planum AB: Ergo reliqua *c* KE perpendicularis quoque erit ad idem planum AB. Eadem ratione recta GN, quæ perpendicularis ponitur ad planum CD erit quoque ad reliquum planum AB perpendicularis. *d* Quare duæ rectæ EK & GN perpendiculares quoque erunt ad rectas contiguas EG & KN in eiſdem planis exiſtentes. Et propterea *e* ſpatium rectangulum EGNK parallelogrãmum erit, cuius oppoſita latera EK, GN æqualia, & parallela erunt; nec non duo latera EG, KN parallela erunt, & æqualia. Iam cùm per duas parallelas EG & KN ducantur duo plana EH & NF ſe ſecantia in recta FH: erit *f* FH parallela ipſi EG; ſed poſitæ fuerant duæ EF & GH parallelæ inter ſe: Ergo *g* ſpatium EGHF parallelogrammum eſt, cuius oppoſita latera EF & GH æqualia erunt. Eadem ratio-

a prop. 6. huius

b pr. 5. huius.

c pr. 4. huius.

d pr. 2. huius.

e pr. 27. lib. 1.

f pr. 8. huius.

g prop. 26. l. 1.

ratione reliquæ omnes rectæ parallelæ ipſis EF, vel GH ſectæ à planis AB & CD oſtendentur æquales inter ſe, & æquales ipſis EF, GH. Quod erat oſtendendum. Vocentur iam duo plana AB, CD parallela inter ſe, & quælibet recta MO perpendicularis ad vtrumque planum vocetur Diſtantia eorum.

EVCL. 16. XI. *Corollarium* Patet, ſi recta linea GN ad vnum æquidiſtantium planorum CD perpendicularis fuerit, eſſe quoque perpendicularem ad reliquum AB. Et ſi duo plana parallela AB, CD ſecentur ab alio plano GF, eſſe communes eorum ſectiones EG, FH parallelas.

EVCL. 10. & 15 XI. PROPOSITIO X. *Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe tangentes fuerint parallelæ, illæ angulos ad eaſdem partes vergentes æquales comprehendent. Et plana, quæ per illas ducuntur: parallela erunt.* Tab. VI. Fig. 32.

Sint duæ rectæ AB, AC ſe tangentes in A parallelæ duabus rectis DE, DF in alio plano exiſtentibus, & ſe tangétibus in D. Dico 1. ad eaſdem partes angulos poſitos BAC & EDF æquales eſſe. Ducatur *a* à puncto A ad planum EDF perpendicularis AH incidens in punctum H, à quò in plano EDF ducantur

a prop. 6 huius.

b re-

b rectæ HK parallela ipſi DE & H N parallela reliquæ DF. Patet *c* angulum KHN æqualem eſſe angulo EDF; Secentur *d* poſtea HK æquales AB & HN æqualis AC, & coniungantur rectæ BC, KN, BK, CN. Et quoniam duæ rectæ AC, HN parallelæ ſunt eidem DF: Ergo *e* AC & HN inter ſe parallelæ ſunt, & erant æquales: Igitur *f* parallelogrammum eſt ACNH; & ideò CN æqualis eſt, & parallela ipſi AH. Eodem modo AB, HK æquales inter ſe ſunt, & *g* æquidiſtant, cum ſint parallelæ eidem DE Ergo vt prius BK æqualis eſt, & parallela eidem AH; & propterea CN & BK æquales inter ſe, & *h* parallelæ erunt. *i* Vnde parallelogrammum erit BCNK, & eius latera oppoſita BC, KN parallela, & æqualia inter ſe erunt. Quare in triangulis ABC, HKN nedum AB, HK æquales ſunt, atque AC, HN æquales, ſed etiam baſes BC, KN ſunt æquales; *l* ideoque angulus BAC æqualis erit angulo KHN; ſed prius erat angulus EDF æqualis eidem angulo KHN. Igitur anguli BAC & EDF æquales inter ſe ſunt.

b cor pr. 16. l. 1.
c ex pr. 7. l. 4.
d prop. 3. l. 1.
e prop. 7. huius
f prop. 27. l. 1
g prop. 7. huius
h prop. 7. huius
i prop. 27. l. 1
l prop. 5 lib. 1.

Secundò dico plana BAC & EDF, quæ per eaſdem rectas ducuntur eſſe parallela inter ſe. Nam recta AH ducta eſt perpendiculariter ad planum EDF; & ideo *m* efficit in-

m prop. 2. huius

eo angulos AHN & AHK rectos, & ſpatia AN & AK, quæ oſtenſa ſunt parallelogramma, erunt *n* rectangula. Quare anguli HAC, HAB recti erunt; ideoque *o* eadem recta AH perpendicularis etiam erit ad planum ABC; & propterea *p* plana ABC, DEF parallela erunt. Vt erat propoſitum.

n ex pr. 34. l. 1
o prop. 2. huius
p prop. 9. huius

EVCL. 17. XI
PROPOSITIO XI *Si duæ rectæ lineæ planis parallelis ſecentur, in eaſdem rationes ſecabuntur.* Tab. VI. Fig. 33.

Duæ rectæ AB & CD, ſiue in eodem, vel diuerſis planis quomodocunque poſitæ, ſecentur à planis inter ſe parallelis EF, GH, KM in punctis A, O, B, C, N, D. Dico eas ſecari proportionaliter, ideſt eſſe AO ad OB vt CN ad ND. Coniungantur rectæ AC, BD & AD, quæ occurrat plano GH in puncto R, & à puncto R ad O & N rectæ OR, RN iungantur. Quoniam planum trianguli ACD ſecatur à duobus planis parallelis EF, GH. Ergo *a* eorum communes ſectiones AC, RN parallelæ erunt, ideoque *b* vt AR ad RD, ita erit CN ad ND. Similiter quia planum trianguli DAB ſecatur à duobus planis GH, KM inter ſe parallelis: Ergo *c* eorum communes ſectiones DB, OR inter ſe parallelæ erunt, ideo-

a cor. pr 9. huius
b prop. 2. lib. 4
c cor pr. 9. huius

ideoque *d* vt AR ad RD, ita erit A O, ad OB; oſtenſa autem fuit CN ad ND in eadem ratione eiuſdem A R ad eandem RD. Ergo *e* AO ad OB erit, vt CN ad ND. Quod erat oſtendendum. d prop. 2. l. 4. e prop. 7. l. 3.

PROPOSITIO XII. *Solidi anguli triãgularis duo quilibet eius plani anguli tertio ſunt maiores.* T. vi. F. 34. EVCL. 20. XI.

Sit triangularis ſolidus angulus A conſtans ex tribus angulis planis BAD, DAC & CAB. Dico duos quoſlibet angulos BAD & DAC, ſimul ſumptos, maiores eſſe tertio angulo BAC. Eligatur angulus B AC qui non minor ſit angulo BA D, & in plano per BAC ducto fiat *a* angulus BAE æqualis angulo BA D, & ſiquidem AE coincidit cũ AC, patet duos angulos BAD, DAC maiores eſſe angulo BAC. Quando vero AE cadit inter rectas BA, AC, in rectis AB, AC ſumantur duo quælibet puncta B & C, & iungatur recta BC, ſecans interceptam AE in E: Et *b* ſecetur AD æqualis EA, iunganturque rectæ lineæ BD, DC & DE. Quoniam circa æquales angulos BAD, BAE ſunt latera AD, AE æqualia, & AB commune. Ergo *c* triangulorum baſes BD, BE æquales ſunt. Quare CE erit differentia duorum laterum BD, B C; & propterea *d* in triangulo BD a prop. 24. l. 1. b prop. 3. l. 1. c prop. 4. l. 1. d prop. 21. l. 1.

C laterum differentia CE minor erit baſe CD; cumque in triangulis DAC, EAC duo latera AD, AE ſint æqualia, & AC commune, & baſis DC maior baſe CE: ergo *e* angulus DAC maior erit angulo EAC; ſed erant anguli BAD, BAE æquales. Igitur *f* ſumma vnius æqualium angulorum BAD, & maioris inæqualium DAC maior erit angulo BAC, qui eſt ſumma vnius æqualium BAE, & minoris inæqualium EAC. Quare patet propoſitum.

e cor. pr 6. l. 2.

f axio 4 lib. 1.

PROPOSITIO XIII. *Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur*. Tabula VI. Fig. 35.

EVCL. 21. XI.

Sit angulus ſolidus A contentus quotcunque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB. Dico eos omnes ſimul ſumptos minores eſſe quatuor planis angulis rectis. *a* Ducatur planum, ſecans omnes rectas angulum A continentes, vt efficiatur *b* figura rectilinea BCDEF tot laterum, quot ſunt plani anguli ſolidum angulum A continentes, & ſumpto intra polygonum BCE quolibet puncto G, ab eo ad angulos omnes polygoni ducantur recta GB, GC, GD, GE & GF. Et quoniam polygoni latera BC, CD, DE, EF, FB ſunt baſes, nedùm triangulorum verticem habentium in G; ſed etiam triangulo-

a poſt. 1 & 2 hu.

b prop. 1. huius

lorum verticem in A habentium. Ergo tot ſunt triangula verticem habentia in G, quot ſunt ea, quæ verticem in A habent; ſed *c* cuiuſlibet trianguli tres anguli ſunt æquales duobus rectis. Ergo a quali numero rectorum æquales erunt anguli omnes triangulorum verticem in G habentium; atque anguli omnes triangulorum verticem in A habentium. Et propterea anguli omnes triangulorum verticem in G habentium, ſimul ſumpti, æquales erunt angulis omnibus, ſimul ſumptis triangulorum verticem habentium in A. Poſtea *d* in angulo ſolido triangulari B duo plani anguli FBA, CBA maiores erunt angulo CBF; ideſt maiores erunt duobus angulis FBG, CBG, & ſic reliqui omnes. Quare omnes anguli, qui ſunt ad baſes triangulorum verticem in A habentium, ſimul ſumpti, maiores erunt omnibus angulis, qui ſunt ad baſes triangulorum verticem in G habentium; ideoque reſidui anguli omnes verticales, qui ſolidum angulum A efficiunt, minores erunt reſiduis omnibus angulis, qui in G verticem habent; ſed *e* anguli omnes, qui in G verticem habent, quatuor angulis rectis ſunt æquales. Igitur anguli plani omnes, qui ſolidum A componunt, ſimul ſumpti, quatuor rectis minores erunt.

c prop. 18. l. 1

d prop. 22. huy.

e expr. 23. l. 1.

EVCL. 23. 26. XI. PROPOSITIO XIV. *Ex tribus angulis planis, quorum duo quilibet tertio ſint maiores, & tres ſimul quatuor rectis minores ſint, ſolidum angulum conſtituere.* Tab. VI. Figura 36. 37.

Sint tres anguli A, B, C, qui ſimul ſumpti ſint minores quatuor rectis; ſed duo quilibet ex eis tertiò ſint maiores. Debet effici angulus ſolidus, cuius tres anguli ſint ipſis A, B, C æquales. In quolibet circulo DGH, cuius radius FD, fiant
a prop. 24. l. 1 *a* ad centrum anguli DFE æqualis angulo A & EFG æqualis angulo B, atque GFH æqualis angulo C:
b ex pr. 11. l. 5 erunt *b* tres arcus DE, EG, GH minores integra circuli peripheria, & duo ex eis maiores tertia, ſicuti anguli A, B, C, ſeu ijs æquales anguli ad centrum F, qui proportionales ſunt peripherijs ſubtenſis, minores ſunt quatuor rectis; & duo
c prop. 10. l. 1. quilibet maiores ſunt tertio. Et à *c* punctis D & H ad radios EF, GF ducantur perpendiculares DR, HM.
d prop. 19. l. 1 Patet *d* rectas DR, HM efficere arcum DER duplum arcus DE, & arcum HGM duplum arcus
e ex pr. 23. l. 1. HG: Quare *e* rectæ DR, HM antequam ad puncta R & M pertingant ſe ſecabunt intra circulum, vt
f prop. 22. l. 4 in O; & propterea *f* rectangula parallelogramma DOR & HOM æ-
g prop. 6. huius qualia erunt. *g* Eleuetur iam à puncto

ćto O recta OS perpendicularis ad planum DRH, cuius *h* quadratum ſit æquale rectangulo DOR, vel HOM, erit OS nedum *i* perpendicularis ad rectas DR, HM in ſubiecto plano exiſtentes; ſed etiam *l* erit media proportionalis tam inter DO, OR, quàm inter HO, OM; & propterea *m* tria puncta D, S, R in ſemicirculi peripheria exiſtent erecti *n* ad planum DGH, cùm per SO erectam ad idem planum ducatur: non ſecus tria puncta H, S, M, in peripheria ſemicirculi erecti ad idem planum exiſtent. Coniungantur tandem rectæ NS, KS. Et quoniam planum DRH oſtenſum eſt perpendiculare ad planum ſemicirculi DSR; eſtque EFN in vno eorum poſita perpendicularis ad DR communem planorum ſectionem: Ergo *o* EF perpendicularis eſt ad planum DSR; & propterea *p* EF perpendicularis eſt ad rectam NS in eo poſitam. Quare in duobus triangulis FNS, FND circa duos angulos rectos SNF, DNF ſunt duo latera DN, NS æqualia, cum ſint radij circuli DSR & FN commune: Ergo *q* anguli SFN, DFN æquales ſunt; eſtque angulus A æqualis angulo DFN, vel DFE in primo caſu, vel angulo DFE complemento ipſius DFN in ſecundo caſu. Ergo angulus SFE æqualis erit angulo A.

h prop. 21. l. 4

i prop. 2. huius

l cor. 2. prop. 14 lib. 4.

m ex pr. 9. l. 4.

n prop. 4. huius

o ex pr. 5. huius

p prop. 2. huius

q prop. 4. l. 1.

Eodem modo oſtendetur angulus SFK æqualis angulo HFK, ſeu angulus SFG æqualis angulo HFG, vel angulo C. At ſi duo anguli A & C, ſiue eis æquales DFE, HFG ſint recti à puncto *r* F eleuetur recta linea FS perpendicularis ad planum anguli EFG. Manifeſtum eſt *ſ* rectam SF perpendicularem eſſe ad ambas rectas FE & FG, & propterea angulus SFE æqualis erit angulo recto A, & angulus SFG æqualis erit recto angulo C: factus autem fuit angulus EFG æqualis angulo B. Igitur tres anguli plani EFS, SFG, GFE componentes angulum ſolidum F æquales ſunt datis angulis A, B, C. Quod faciendum erat.

r prop.6 huius.

ſ prop.2 huius.

DEFINITIONES SECVNDÆ.

I. *SI à perimetro figuræ planæ ad ſublime punctum recta linea eleuata conuertatur circa figuræ perimetrum, fixo manente puncto ſublimi, quouſque redeat ad locum, à quo cæperat moueri: vocabitur ſolidum genitum, ſi figura ſubiecta rect linea fuerit,* Pyramis.

II. *SI verò fuerit circulus: vocetur* Conus.

III. *ET punctum ſublime fixum vocetur* Vertex *Pyramidis, vel Coni.*

IV. *ATQVE figura plana ſubiecta vocetur* Baſis *eius.*

ET

ET perpendicularis à vertice ad baſim Pyramidis, vel conducta: vocetur eius Altitudo. V.

ET ſi quidem perpendicularis à vertice incidat non extra baſim: vocetur illa Directa. VI.

SI verò extra ceciderit: vocetur Pyramis Inclinata. VII.

ET recta à vertice ad angulum baſis pyramidis: vocentur Latera eius. VIII.

ET qualibet recta à vertice ad circumferentiam circuli baſis coni: eius Latus *vocetur.* IX.

ATQVE recta à vertice ad centrum circuli baſis: vocetur Axis Coni. X.

CONI verò, quorum axes erecti fuerint ad baſim: vocentur Recti. XI.

ET quorum axes inclinati ſunt ad baſim vocentur Scaleni. XII.

SI à perimetro figuræ planæ recta eleuata non in eius plano iacens reuoluatur ſemper ſibi ipſi æquidiſtanter conſtituta circa figuræ perimetrum, quouſque redeat ad locum, à quo moueri cœperat; atque ſuperficies gentia ſecetur plano æquidiſtante figuræ ſubiectæ: vocabitur ſolidum gentium, ſi figura ſubiecta rectilinea fuerit, Priſma. XIII.

SI verò fuerit circulus vocetur Cylindrus. XIV.

ET figura ſubiecta vocetur eius Baſis. XV.

ET recta linea translata in cylindro, & adherens angulis baſis Priſmatis inter baſim, & oppoſitum planum ei XVI.

parallelum intercepta, vocetur Latus *eius*.

XVII. *ET perpendicularis ad baſim intercepta inter oppoſita plana parallela*: Altitudo *eius vocetur*.

XVIII. *ATQVE linea ex centro baſis cylindri parallela lateri*: Axis *eius vocetur*.

XIX. *ET ſi latera perpendicularia fuerint ad baſes: erunt Priſma, & Cylindrus Recti*.

XX. *SI verò inclinata fuerint vocentur* Scaleni.

XXI. *PRISMA à ſex planis quadrilateris, quorum oppoſita ſint* Parallela, *contentum: vocetur* Parallelepideum.

XXII. *SIMILES Coni, & Cylindri ſunt, quorum axes æquè inclinati ſunt ad baſes, & proportionales ſunt diametris baſium*. Tabula VI. Fig. 38. 39.

Vt ſi fuerit figura plana A B C rectilinea, vel circulus; atque punctum E in ſublimi extra dictum planum, & à puncto A ad E iungatur recta AE atque recta AE circa punctum fixum E conuertatur per figuræ ABC perimetrum, quouſque redeat ad locum, à quo cæperat moueri; tunc quidem genita figura ſolida EABC habens ſubiectam figuram planam ABC rectilineam: vocabitur *Pyramis*. Si vero plana figura ABC fuerint circulus: vocabitur *Conus*.

Sed ſi recta linea AE, iacens extra planum figuræ ABC reuoluatur

per

per figuræ ABC perimetrum ſemper tamen ſibi ipſi æquidiſtanter conſtituta dum mouetur, quouſque redeat ad locum à quo moueri cæperat, atque ſuperficies genita à recta AE reuoluta ſecetur plano E parallelo plano figuræ ABC; tunc quidem ſolida figura genita EABCE habens ſubiectam figuram planam ABC rectilineam, vocabitur *Priſma*; illa verò, quæ habet figuram ABC circulum, vocetur *Cylindrus*.

Et punctum E in pyramide, & Cono: *Vertex* vocetur; in omnibus autem dictis ſolidis figura plana ABC vocetur *Baſis* ſolidi; Et recta linea EG perpendicularis ad planum baſis ducta à vertice E, vel à plano oppoſito baſi: vocatur *Altitudo* ſolidi. Et in pyramide ſi dicta perpendicularis EG incidat non extra baſim ABC; tunc pyramis vocatur *Directa*; ſi verò extra cadat, vocetur piramis *Inclinata*.

Et recta linea EA tranſlata, vbicunque ſumatur, vocatur latus coni, vel cylindri; ſed angulos baſis contingens vocatur *latus* pyramidis, vel priſmatis.

Et recta linea EH à circuli centro H ad verticem ducta in cono, & parallela lateri EA in cylindro, vocetur *Axis* eius.

Coni, quorum axes perpendiculares fuerint ad baſes vocantur *Re-*

cti, reliqui verò *Scaleni*.

Priſma verò, & cylindrus, cuius latus perpendicularis fuerit ad planum baſis: vocabitur *Rectus*; reliqui verò *Scaleni*.

PROPOSITIO XVI. *Si Pyramis vel conus ſecetur plano parallelo baſi, erit ſegmentum eius ad partes verticis, Pyramis vel conus ſimilis priori; & ſectio erit figura plana ſimilis baſi, quæ erunt in duplicata ratione altitudinum eorum ſolidorum, quorum ſunt baſes.* Tabula VI. Figura 40. & Tabula VII. Figura 1.

Sit conus vel pyramis RACBM ſecta plano GKHS parallelo baſi ACBM, & RN ſit altitudo pyramidis, ſeu perpendicularis à vertice ad baſim ducta, quæ ſecet planum GKS in O; eritque *a* RO perpendicularis quoque ad planum GKS parallelum ipſi ACM. Dico primo figuram ſolidam RGKHS pyramidem eſſe ſimilem ipſi RACBM, & planam figuram GKHS ſimilem eſſe baſi ACBM, & inter ſe eſſe in duplicata ratione altitudinum RO, & RN. Quoniam duo plana parallela ACBM & GKHS ſecantur planis iiſdem triangulorum RAC, RCB, RBM & RMA. Ergo *b* eorum communes ſectiones AC, GK paralle-

a cor. pr 9. huius

b cor. pr 9. huius

rallelæ ſunt inter ſe, nec non CB, KH, pariterque BM, HS, atque MA, SG ſimiliter æquidiſtant. Vnde *c* figuræ planæ ACBM & GKHS æquiangulæ ſunt interſe; atque triangula *d* RAC, RGK æquiangula ſunt inter ſe, & ſimilia: Pariterque triangula RCB, RKH atque etiam triangula RBM, RHS, nec non triangula RMA, RSG ſunt inter ſe æquiangula, & ſimilia. Quare anguli ſolidi A & G æquales ſunt inter ſe, & circa eos latera RA ad AM proportionalia ſunt lateribus RG ad GS: pariterque CA ad AR erit, vt KG ad GR; Vnde ex compoſitione ordinata erit CA ad AM, vt KG ad GS. Eadem ratione anguli ſolidi B & H pariterque anguli ſolidi C & K; nec non ſolidi anguli M & S æquales erunt, exiſtente angulo ſolido R communi; & circa dictos angulos ſolidos æquales erunt, vt prius, latera proportionalia. Ergo *e* pyramis RGKHS ſimilis eſt pyramidi RACBM. Et quia duæ RA, RN ſecantur à duobus planis GH, AB parallelis inter ſe & conueniunt in R ergo *f* RN ad RO eſt vt RA ad RG, ſeu vt AC ad GK: ſunt verò figuræ planæ ACBM & GKHS æquiangulæ, quorum latera circa angulos æquales ſunt proportionalia, vt dictum eſt: Ergo *g* ſunt ſimilia, & *h* habent duplica-

c ex pr. 7. l. 4.
d ex pr. 6. l. 4.
e def. 8 huius.
f pr. 11 huius.
g pr. 6. l. 4.
h pr. 7. lib. 4.

tam proportionem lateris A C ad eius homologum GK. Eſtque RN ad RO, vt AC ad GK. Ergo *i* figura ACBM ad figuram GKHS duplicatam rationem habet altitudinis RN ad altitudinem RO. Poſtea in cono RAB per eius axim RV ducto quolibet plano RAB id à planis æquidiſtantibus A, B, G, H, *l* ſecabitur in rectis AB, GH parallelis interſe, quæ in æiſdẽ *m* rationibus diuidentur à tribus rectis RA, RV, R B. Ergo GK æqualis eſt KH, ſicuti radius circuli AV æqualis eſt radio VB quare omnes rectæ à puncto K ad perimetrum G H ſunt æquales interſe & ideo circulus eſt talis figura cuius radius KG ad radium VA eandem rationem habet quam axis KR ad axim VR, vel quam altitudo O R ad N R. Quæ erant oſtendenda.

i ex pr. 19. l. 3.

l 11. hu. 12. l. 4

m 12. huius.

PROPOSITIO XVII. *In Priſmate, vel cylindro latera omnia æqualia ſunt inter ſe, & figura plana parallela baſi æqualis, & ſimilis eſt baſi.* Tab. VII. Fig. 2.

Sit Priſma, vel Cylindrus AEG C, & planum parallelum baſi ſit E FG. Oſtendendum eſt latera omnia æqualia eſſe inter ſe; & in priſmate rectilineam figuram EFG æqualem, & ſimilem eſſe baſi ABC; in cylindro verò figuram EG circu-

lum

lum eſſe æqualem circulo AC. A puncto F, vbi axis BF cylindri ſecatur plano EG, ducantur ad perimetrum figuræ EG quęlibet rectæ FE, FG, ponanturque cylindri latera EA, GC, iunganturque rectæ AB, BC. Quoniam *a* in vtroque ſolido bina latera, vel latus AE, & axis BF ſunt parallela inter ſe: Ergo *b* in vno ſunt plano, & ab hoc plano ſecantur parallela plana AC, EG: Igitur *c* ſectiones oppoſitæ AB, EF parallelæ ſunt inter ſe, & *d* ſpatium AF parallelogrammum erit, cuius oppoſita latera AB ipſi EF, atque AE ipſi BF æqualia erunt. Eadem ratione BG, parallelogrammum, erit, & CG ipſi BF, ſeu lateri AE æquale erit, atque CB ipſi GF æquale, & parallelum erit, ſicuti AB, EF æqualia, & parallela erant. Ergo *e* angulus ABC æqualis eſt angulo EFG, & ſic reliqui omnes anguli in priſmate æquales erunt; atque circa æquales angulos latera ſunt proportionalia (cùm duo *f* æqualia AB, EF ad duo æqualia CB, GF in eadem ſint ratione, & ſic reliqua omnia latera circa reliquos æquales). Igitur *g* figura EFG ſimilis, & æqualis eſt figuræ rectilineæ ABC; cùmque in cylindro à puncto F ſumpto intra figuram EG quælibet rectæ FE, FG eductæ æquales ſint radijs AB, CB, & ideo æquales inter

a def. 16 18. ſecun hu.
b pr. 14 lib. 1.
c corol. pr. 9. hu.
d pr. 26 lib. 1.
e ex pr. 7. l. 4.
f pr. 3. lib. 3.
g pr. 16 lib. 4.

ter

h def. 8 lib. 1. ter ſe. Ergo *h* figura EG circulus
eſt, cuius centrum F æqualis *i* cir-
i axio. lib. 2. culo AC: fuerunt autem latera AE, CG & ſic reliqua omnia latera oſtenſa æqualia tam in priſmate, quàm in cylindro. Patet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XVIII. *Si ſuper baſe pyramidis triangularis directæ duo priſmata recta deſcribantur infra verticem pertingentia: ſupremum priſma circumſcriptum, & maius erit fruſto pyramidis ſupremo, & infimum priſma inſcriptum, minus erit inferiori fruſto pyramidis.* Tabula VII. Figura 3. 4.

Super baſe ABC triangularis directæ pyramidis RABC deſcripta ſint duo priſmata recta ABP & AVB, quæ ſecent pyramidem infra verticem R in planis DEF, & GHK parallelis baſi ABC. Dico ſupremum priſma AVB circunſcriptum & maius eſſe fruſto ſupremo pyramidis AFB, & infimum priſma APB inſcriptum & minus eſſe pyramidis infimo fruſto AKB. Et primò RBH perpendicularis à vertice R, incidat in angulum B. Quoniam duæ rectæ RH & VCP ſunt latera priſ-
a corol. prop. 9. huius. matis recti, perpendiculares erunt ad planum ABC, ſiue ad *a* planum
b pr. 2. & pr. 5 GHK ei parallelum: *b* Ergo anguli RBC, VCB recti ſunt, & VP

paral-

parallela eſt ipſi RH, & *c* in eodem plano trianguli RHK exiſtunt, in quo rectæ CB & BH iacent: Sed in triangulo RBC eſt angulus B rectus: ergo *d* angulus RCB eſt acutus; & ideo perpendicularis VC cadit extra triangulum RKH & eius productio CP intra idem triangulum cadet: Eadem ratione recta SA intra triangulum RGH, & eius productio AZ extra ipſum cadet. Quare parallelogrammum AP intra pyramidem, & parallelogrammum AV extra ipſam cadet; & propterea priſma APB intra fruſtum AKB inſcriptum erit, & minus erit illo atque priſma AVB circunſcriptum, & maius erit fruſto pyramidis AFB.

c pr. 14 lib. 1.

d ex pr. 18 lib. 1

Secundò cadat perpendicularis RN, aut in latere AB, aut intra triangulum ABC in puncto N, & per latera pyramidis, & per perpendicularẽ RN plana ducantur: diuiſa erit pyramis in duas, aut tres pyramides; & in qualibet earum perpendicularis à vertice incidit in angulum baſis; & *e* propterea omnia infima priſmata ſuper baſes deſcripta, ideſt priſma ex eis compoſitum ABP inſcriptum, & minus erit infimo fruſto pyramidis ABK, & omnia ſuprema priſmata ſuper eaſdem baſes deſcripta, ideſt priſma ex eis compoſitum ABV circunſcri-

e parte 1. huius

ſcriptum, & maius erit pyramidis ſupremo fruſto ABF. Quare patet propoſitum.

PROPOSITIO XIX *Si per rectam lineam baſim coni, vel cylindri ſecantem, vel tangentem, & per latus ſolidi planum ducatur: quod per ſecantem ducitur intra ſolidum cadet; quod verò per tangentem ducitur continget ſolidi ſuperficiem, & extra ſolidum cadet.* Tab. VII. Fig. 5. 6.

Sit conus, aut cylindrus, cuius baſis BCD, ſummitas A, & recta linea BC ſecet baſim ſolidi, at recta BF tangat eam in B, & poſito latere BA ducantur plana ABCA & ABFA. Dico planum ABCA intra ſolidum cadere, & planum ABFA tangere ſolidi ſuperficiem, & extra ipſum cadere. Quia latus AB in ſuperficie ſolidi exiſtit, & eſt quoque in plano ABCA, vel in plano ABFA: Ergo *a* in eorum communi ſectione, vel contactu exiſtit. Quare planum ABCA; nec non planum ABFA ſecat, vel tangit ſolidi ſuperficiem in recta linea AB. Eadem ratione planum ABCA ſecat ſolidi ſuperficiem in latere AC à puncto C ducto. Suntque rectæ AB, AC latera coni, ergo in eo efficiunt triangulum ABC per verticem ductum & ſecantem circulum baſis in recta linea BC intra

a axio.
3. huius

tra

tra conum poſita. Et ideo planum
ABC conum ſecabit. at in cylindro
rectæ lineæ AB, AC eius latera, *b ex 18*
ſunt parallela interſe, quæ *b* paral- *huius.*
lelogrammum ABCA conſtituent,
ideoque ſecat circulum baſis in recta
BC poſita intra cylindrum; & ideo
planum ABCA cylindrum ſecabit.
Poſtea quia recta BF circulum tan-
gens in B cadit tota extra ipſum, ex
pr. 21. lib.2., ergo planum ABFA
per latus AB & per tangentem BF
extenſum cadet extra ſuperficiem
coni vel cylindri. Quod erat &c.

PROPOSITIO XX. *Si triangu-
lum, & parallelogrammum ſuper æ-
qualibus rectis lineis deſcripta, fue-
rint inter ſe æqualia: ſuper ea deſcri-
pta priſmata recta æquè alta erunt,
æqualia inter ſe.* Tab. VII. Fig.7.

Sint triangulum ABC, & paral-
lelogrammum DG æqualia inter ſe,
quorum latera BC & EG æqualia
inter ſe ſint. Dico priſmata recta
ſuper his ſpatijs deſcripta, quorum
altitudines æquales ſint rectæ lineæ *a prop.*
T, eſſe inter ſe æqualia. *a* Secetur *9.lib.1*
AC bifariam in O, & *b* per O du- *b cor.pr*
catur recta OM parallela BC ſecans *16. l. 1.*
AB in M, & *c* fiat angulus CBP æ- *c pr. 14*
qualis angulo E, *d* & conpleatur pa- *lib. 1.* *d pr.26*
rallelogrammum BPQC, ducatur- *lib. 1.*
que CN parallela *e* BA, ſecans *f* M *e cor.pr*
PO in N. Quoniam duæ rectæ AC *16. l. 1* *f ex pr.*
MN *29. l. 1.*

MN, conuenientes in O ſecantur à
g ex pr. 9. l. 4. parallelis BM & CN: Ergo g tri-
angula AMO & CNO ſimilia ſunt,
& habent latera homologa AO, C
h ex pr. 17. l. 4 O æqualia, Ergo h triangula AM
O, CNO etiam æqualia inter ſe-
ſunt. & quoniam, facta intellectua-
li applicatione baſes AMO & CN
O ſimiles, & æquales ſibi mutuò
congruunt, altitudines verò ab an-
gulis A, M, O, C, N, perpendicu-
lariter eleuatæ ad plana triangulo-
rum congruentium, cum æquales
ſint inter ſe, pariter ſibi mutuò con-
i ex pr. 5. huius gruent (aliàs i ab ijſdem punctis bi-
næ perpendiculares duci poſſent ad
ſubiectum planum quod eſt impoſſi-
bile) Ergo plana per congruentes
perpendiculares extenſa, & per ea-
rum ſummitates ducta ſibi mutuò
congruent. Vnde figuræ ipſæ ſoli-
dæ conprahenſæ ſibi mutuò congru-
ent; & ideo priſmata, quorum ba-
ſes triangula AMO & CNO, alti-
tudines verò æquales rectæ T, erunt
inter ſe æqualia, additoque commu-
ni priſmate recto eiuſdem altitudi-
nis, cuius baſis quadrilaterum MB
CO, cum quo priora priſmata recta
triangularia æquè alta vnicũ priſma
conſtituent (eo quod à puncto O
perpendicularis eleuata ad planum
ABCO eſt latus commune trium
priſmatum rectorum, quorum baſes
conueniunt in O, & ſic reliquæ per-

pen-

pendiculares), erunt priſmata re-
cta altitudine T deſcripta, quorum
baſes triangulum ABC, & paralle-
logrammum BN, æqualia inter ſe.
Rurſus quoniam ſuper recta MOQ
ductæ ſunt MB, NC parallelæ in-
ter ſe pariterque PB, QC paral-
lelæ inter ſe: Ergo triangula *l* *l ex pri 7. l. 4.*
MBP & NCQ ſimilia ſunt, & *m* æ-
qualia, cùm latera homologa MB, *m ex pr 17 l. 4*
NC oppoſita *n* in parallelogrammo *n pr. 26*
NB æqualia ſint. Quare, (vt prius *lib. 1.*
dictum eſt) priſmata recta altitudi-
ne T deſcripta, quorum baſes trian-
gula æqualia, & ſimilia MBP, NQ
C ſunt æqualia inter ſe; & addito
communi priſmate recto eiuſdem
altitudinis T, cuius baſis quadrila-
terum BPNC: erunt priſmata recta
altitudine T deſcripta, quorum ba-
ſes parallelogrammum MBCN, &
parallelogrammum PBCQ æqualia
inter ſe; ideoque priſmata recta al-
titudine T deſcripta, quorum baſes
triangulum ABC, & parallelogrã-
mum PBCQ æqualia erunt inter ſe.
Et quoniam parallelogrammum EK
æquale erat triangulo ABC, & huic
triangulo æquale eſt parallelogram-
mum MBCN, *o* ſeu PBCQ (cùm *o pr. 31*
æqualibus triangulis AMO, CNO *lib. 1.*
addatur commune quadrilaterum M
OCB): Ergo parallelogramma E
K, PBCQ æqualia ſunt, & habent *p ex pri*
baſes BC, EG æquales; *p* ergo ſunt *1. l. 4.*
æque

æquè alta; quare (vt in pr. 30. lib. 1. oſtenſum eſt) circa angulos PBC & æquales eorum latera eleuata PB, DE æqualia erunt; & propterea q eadem parallelogramma ſimilia erunt. Quapropter priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes parallelogramma EK & PBCQ ſimilia, & æqualia, erunt pariter æqualia inter ſe. Oſtenſa autem fuerunt æqualia inter ſe priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum ABC, & parallelogrammum PBCQ. Igitur priſmata recta altitudine T deſcripta, quorum baſes triangulum ABC, & parallelogrammum EK æqualia erunt inter ſe. Quod erat, &c.

q pr. 18 lib. 4.

PROPOSITIO XXI. *Si duo priſmata recta triangularia baſes, & altitudines æquales habuerint: erunt inter ſe æqualia.* Tab. VII. Fig. 8.

Sint duo priſmata recta, quorum baſes ſint qualibet triangula A & B æqualia inter ſe, altitudines verò æquales ſint rectæ lineæ P. Dico priſmata ipſa eſſe inter ſe æqualia. Fiat a parallelogrammum CE æquale triangulo A, & parallelogrammũ MG æquale triangulo B in angulo GEM æquali angulo DEF, quorũ baſes FE & EG ſint æquales baſibus triangulorũ, & diſponantur in directum, vt DE & EM in directum pariter ſint, b (aliàs non efficerent angulos æqua-

a ex pr. 20. l. 4

b cor. pr 5. l. 1.

æquales ad verticem E); Et perficiantur *c* parallelogramma FM, DG & ON, ducanturque diametri NE, OE. Quoniam parallelogramma CE & EH æqualia ſunt triangulis A & B æqualibus inter ſe: Ergo ipſa parallelogramma erunt inter ſe æqualia: Quare *d* erit reciprocè, vt FE ad EG, ita ME ad ED; & *e* permutando, erit vt FE ad EM, ita GE ad ED, & ſic reliqua latera proportionalia oſtendentur: Quare *f* parallelogramma FM & DG, quæ habent latera homologa circa angulos æquales in directum poſita, ſimilia erunt inter ſe; & *g* propterea diametri OE, NE erunt in directum; *h* quæ ſecabunt ſingula parallelogramma FM, DG, CH in duo triangula æqualia, & *i* ſimilia, cum ſint æquiangula. Et quia priſmata recta quorum baſes triangula ſimilia & æqualia CON, ONH, & communis altitudo æqualis eſt rectæ P, ſunt inter ſe æqualia: Ergo ſi ab eis auferantur priſmata recta æqualia, quorum baſes triangula ſimilia, & æqualia OFE & OME, communis altitudo æqualis P, remanebunt duo priſmata recta æqualia, quorum baſes quadrilatera CFEN & HMEN, altitudines æquales P. Et ſi rurſus ab his auferantur priſmata recta æqualia, quorum baſes triangula ſimilia, & æqualia EDN & EGN, altitu-

c pr.16 lib. 1.
d pr.14. lib. 4.
e pr.12. lib. 3.
f pr.16. lib. 4.
g pr.19. lib. 4.
h pr.26 lib. 1.
i prop.4 lib. 4.

titudines æquales P, remanebunt duo priſmata recta, quorum baſes parallelogramma CE & EH, altitudines æquales P, quæ erunt neceſſariò æqualia inter ſe; *l* ſed priſmata recta, quorum baſes æquales triangulum A, & parallelogrammum CE ſuper æqualibus rectis deſcripta, altitudines æquales P, ſunt æqualia inter ſe; pariterque priſmata recta, quorum baſes æquales triangulum B, & parallelogrammum EH, altitudines æquales P, ſunt æqualia inter ſe. Ergo duo priſmata recta, quorum baſes triangula A & B, quorum altitudines æquales P, inter ſe æqualia ſunt. Quod erat oſtendendum.

l pr. 20 huius.

PROPOSITIO XXII. *Cuilibet pyramidi triangulari directa figura compoſita ex priſmatibus rectis æquè altis circunſcribi poteſt, & altera inſcribi, ita vt circunſcriptæ vel inſcriptæ differentia à pyramide minor ſit quacunque data magnitudine. Vocentur huiuſmodi figuræ* Gradatæ *pyramidi* Adſcriptæ. Tab. VII. Fig. 9.

Sit pyramis triangularis DABC & DB perpendicularis à vertice incidat nō extra baſim ABC, & ſit data qualibet magnitudo &. Dico fieri poſſe quod proponitur. *a* eleuetur EA perpendicularis ad planum ABC, & reuoluatur vt præcipit 13. def.

a prop. 6 huius.

def. 2. huius, factũ erit priſma *b* rectũ BEC ſuper baſim ABC altitudine B D & hæc altitudo diuidatur bifariã *c* in M, & *d* per M ducatur planum parallelum baſibus: erit iam vniuerſum priſma BEC ſectum in duo priſmata recta æqualia inter ſe (eo quod tam baſes ABC, EDY, quàm altitudines perpendiculares MD, MB æquales ſunt inter ſe); Et ſi rurſus MB bifariam ſecetur in G, & per G planum GFH parallelum baſibus ducatur: erit rurſus priſma AGC ſemiſſis præcedentis; Et ſi denuo hæc bipartita ſubdiuiſio reſidu rum altitudinum, & ductio planorum ſemper repetatur, remanebit *e* tandem aliquod priſma minus quacunque magnitudine propoſita. Ergo repertum iam ſit priſma BFC minus magnitudine &, perque *f* reliquas ſectiones M, P: qualiter diuidentes altitudinem BD, plana MLN & OPQ ducantur parallela baſi ABC; Poſtea *g* deſcribantur duo priſmata recta ſuper baſim GIK ſupra, & infra ſectionem in planis immediatè ſequentibus terminata, *h* quorum infimum IBK priſma inſcriptum erit fruſto pyramidis inferiori AFB, & ſupremum priſma RGS circunſcriptum erit fruſto ſuperiori LKM, quæ duo priſmata erunt æqualia, cum eandem baſim IGK, & æquales altitudines perpendiculares GM, G

b def. 19. hu. sec.
c pr. 9. lib. 1.
d ex pr 10. hu.
e ex pr. 27. l. 2
f ex pr. 10. hu.
g def. 19 sec. huius.
h pr. 18. huius.

B habeant. Pari modo ſuper baſim LMN cum altitudinibus æqualibus MP, MG deſcribantur duo priſmata æqualia, LGN inſcriptum fruſto pyramidis LGK, & priſma LVM circunſcriptum fruſto pyramidis ONM. Similiter ſuper baſim OPQ cum æqualibus altitudinibus PD, PM deſcribantur duo priſmata æqualia, OMQ inſcriptum fruſto pyramidis ONM, & priſma OZP circunſcriptum fruſto pyramidis DOQP, & ſic vlterius procedatur in reliquis ſectionibus, ſi plures extiterint.

Patet ergo, quòd priſmata omnia recta KBI, NGL, QMO inſcripta pyramidi, ſimul ſumpta, æqualia ſunt priſmatis GRK, MTN. PXQ circunſcriptis pyramidi ſimul ſumptis, ideſt figura ex priſmatis compoſita circunſcripta pyramidi DABC abſq; in ſimo priſmate BFC ęqualis eſt figuræ ex priſmatis compoſitæ inſcriptę eidem pyramidi. Quare exceſſus, quo figura vniuerſa circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidem pyramidi æqualis eſt priſmati BFC; At ſolidum BFC minus eſt propoſita magnitudine &: Ergo exceſſus quo figura tota circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidem pyramidi minor eſt magnitudine &; Sed pyramis DABC pars eſt, & ideo minor, quàm figu-

ra pyramidi circunſcripta, & eadem pyramis totum eſt, & ideo maior figura eidem inſcripta. Quare differentia figurarum inſcriptæ pyramidi à circunſcripta maior eſt, quàm differentia inter figuram circunſcriptam, aut inſcriptam, & pyramidem ipſam; differentia verò dictarum figurarum circunſcriptæ, & inſcriptæ minor eſt magnitudine &. Ergo exceſſus, aut defectus, quo circunſcripta, aut inſcripta excedit, aut deficit à pyramide, minor eſt magnitudine &. Quod fieri poſſe oſtendendum erat. Vocentur dictæ figuræ, ex priſmatis rectis æquè altis compoſitæ, *Gradatæ* figuræ pyramidi adſcriptæ.

PROPOSITIO XXIII. *Si duæ triangulares Pyramides directa habuerint baſes, & altitudines æquales: erunt inter ſe æquales.* Tabula VII. Figura 10.

Sint duæ pyramides CA, DB, quarum baſes triangula A, B æqualia, & altitudines perpendiculares CA, DF non extra baſes cadentes, ſint etiam æquales. Dico pyramides æquales eſſe inter ſe. Adſcribantur *a* pyramidi CA duæ figuræ gradatæ KLM circunſcripta, & NO inſcripta, ita vt differentia figuræ KLM, aut NO à pyramide CA minor ſit quacunque magnitudine *a prop. 22. hu.*

 data:

data: ſintque figuræ genitæ à planis parallelis baſi trianguli A, G, N, I, altitudines priſmatum comprehendentium figuras adſcriptas ſint æquales ipſi HA. Poſtea *b* perpen-
b pr.28 lib. 1. dicularis DF in tot partes æquales vni QF diſtribuatur, in quot partes æquales vni AH diuiſa fuit perpen-
c ex pr. 10. hu. dicularis CA, & *c* per ſingula diui-ſionum puncta plana parallela baſi
d ex pr. 16.hu. efficiant *d* triangula P, V, Z ſimilia ipſi B: & *e* compleantur figuræ gra-
e pr.22. huius. datæ circunſcripta RSF, & inſcripta VX. Et quoniam HA, QF æquè metiuntur æquales altitudines CA,
f prop.2 lib. 3. DF: Ergo *f* HA, QF æquales ſunt & ſic reliquæ altitudines priſmatum rectorum æquales erunt: habent *g*
g pr.18 huius. verò triangula æqualia A, B ad duo triangula illis ſimilia G, P eandem proportionem duplicatam altitudi-
h pr. 3. & 19 lib. 3. nis AC ad HC, ſeu FD *h* ad QD, cùm tam CA, DF, quàm CH, DQ
i pr.4. lib. 3. æquales ſint. Ergo *i* triangula G,P æqualia ſunt. Eadem ratione æqualia erunt triangula N, V, &c. Tan-
l pr.22. huius. dem *l* priſmata recta, quorum baſes triangula æqualia A, B, altitudines HA, QF æquales etiam, erunt inter ſe æqualia: eadem ratione reliqua priſmata recta numero æqualia comprehendentia gradatas figuras circunſcriptas, & inſcriptas æqualia erunt inter ſe. Quapropter duæ figuræ gradatæ KLM, RSF circun-

ſcrip-

ſcriptæ pyramidibus CA, DB æquales erunt: pariterque duæ figuræ gradatæ inſcriptæ NO, VX erunt æquales; & hoc ſemper verum erit quacunque exiſtente differentia pyramidis CA à figura gradata KLM, vel NO. Quapropter erunt duæ magnitudines, prima pyramis CA, ſecuuda pyramis DB; & figura gradata KLM, maior, quàm prima (exceſſu minore quolibet dato) eſt quoque maior ſecunda, cùm figura KLM æqualis ſit RSF circunſcriptæ, & ideo maioris pyramide DB; atque figura gradata NO minor, quàm prima (defectu minore quolibet dato) eſt quoque minor ſecunda, cùm figura NO æqualis ſit VX inſcriptæ, & ideo minoris pyramide DB. Ergo *m* pyramis CA æqualis eſt pyramidi DB. Quod, &c. *m ex pr 24. lib. 5.*

PROPOSITIO XXIV. *Si duæ pyramides triangulares inclinatæ habuerint baſes & altitudines æquales, erunt æquales inter ſe.* Tabula VII. Fig. 12. 13.

Sint duæ pyramides DABC, & KHGH, quarum baſes, triangula ABC, GFH æqualia inter ſe, & perpendiculares à ſummitatibus ad baſes ductæ DE, KM ſint æquales inter ſe, & cadant extra baſes pyramidum: Dico pyramides eſſe æquales inter ſe. A terminis perpendicula-

cularium E, & M ad angulos baſium coniungantur rectæ EA, EC, EB, MG, MF & MH, & in figuris EABC & MGFH ſumantur puncta C & O, vbi conueniunt triangula omnia, in quæ dictæ figuræ reſoluuntur; & *a* eleuentur CR, ON æquales ipſis DE & MK & perpendiculariter ad plana baſium EAB, MGFH, & coniungantur rectæ AR, BR, ER, GN, FN, HN, MN. Quoniam duæ pyramides DABE & RABE triangulares eandem baſim ABE habent, & æquales altitudines DE, RC, quæ non incidunt extra baſim: ergo *b* pyramides DABE & RABE æquales ſunt inter ſe. Rurſus quia ſuper eadem baſi BCE cum æqualibus altitudinibus DE, RC non cadentibus extra baſim factæ ſunt duæ pyramides triangulares DBEC & RBEC. *c* Ergo hæ æquales ſunt inter ſe, quæ ſi à prioribus æqualibus pyramidibus DABE, RABE tollantur, remanebunt pyramides DABCE & RABCE æquales inter ſe. Et, ſi ab his tollantur duæ triangulares pyramides æquales DACE & RACE (quæ eandem baſim ACE habent, & altitudines æquales DE, RC non cadentes extra baſim) remanebunt pyramides DABC & RABC æquales inter ſe. Eadem ratione pyramis inclinata KGFH æqualis erit directæ

a pr. 3. lib. 1. & pr. 6. hu.

b prop. 23. hu.

c pr. 23. huius.

ctæ

ctæ pyramidi NGFH ſuper cōmuni baſi GFH, quæ habet altitudinem NO æqualem illius altitudini KM. Eſt verò *d* pyramidi NGFH æqualis pyramis RABC, quia eorum baſes GFH & ABC æquales ſuppoſitæ ſunt, & altitudines NO, RC non cadentes extra baſes ſunt æquales, cùm ſint æquales duabus æqualibus KM, DE. Ergo pyramis KGFH æqualis eſt pyramidi RABC; ſed eidem pyramidi RABC oſtenſa fuit æqualis pyramis DABC. Ergo duæ pyramides KGFH, DABC æquales ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum. *d prop. 23. hu.*

PROPOSITIO XXV. *Quælibet pyramides eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes.* Tabula VII. Figura 12. 13. EVCL. 5. & 6. XII.

Sint duæ pyramides primò triangulares DABC & MFGH, quarum altitudines DE, MO æquales ſint. Dico pyramidem DABC ad pyramidem MFGH eandem proportionem habere, quam baſis AB C ad baſim FGH. Producatur HF indefinitè verſus F, vt in S, & *a* ſecetur FO, quæ ſit quælibet menſura ipſius FH, & ſumatur SF quælibet multiplex eiuſdem FO, & compleantur pyramides triangulares MFO G, MFGS. Et quia *b* quoties FO metitur FH, toties triangulum FG *a prop. 28. l. 1* *b ex pr. 32. lib. 1*

O menſurat triangulum FGH, atque *c* quoties triangulum FGO metitur triangulum FGH, toties pyramis MFGO menſurat pyramidem MFGH. Ergo *d* triangulum FGO & pyramis MFGO æquè metiuntur triangulum FGH, & pyramidem MFGH. Eadem ratione quoties OF metitur ipſam FS, toties triangulum FOG ipſum triangulum SFG, atque pyramis MFOG pyramidem MFSG metientur; & propterea, *e* triangulum SFG ipſius FGH, atque pyramis MFSG pyramidis MFGH quælibet, & eædem partes erunt, quemadmodum SF partes eſt ipſius FH. Vnde erunt quatuor magnitudines, prima baſis ABC, ſecunda baſis FGH, tertia pyramis DABC, quarta pyramis MFGH, & duæ aliæ, ſcilicet triangulum FSG, & pyramis MFSG, quæ ſunt quælibet, & eædem partes conſequentium, ideſt haben ad triangulum FGH, & ad pyramidem MFGH quamlibet & eandem rationem commenſurabilem, & *f* quoties triangula SFG & ABC æqualia ſunt, etiam æquè altæ pyramides MFSG & DABC ſunt æquales; & quoties triangulum SFG maius eſt triangulo ABC, etiam pyramis MFSG maior eſt pyramide æquè alta DABC, & quotieſcunque illud minus eſt, hæc quoque eſt minor illa. Ergo *g* baſis ABC ad

c ex pr. 24. hu.
d prop. 7. l. 3.
e Def. 6. l. 3.
f pr. 23. & 24. huius.
g pr. 23 lib. 3.

C ad baſim FGH eandem rationem habet , quam pyramis DABC ad pyramidem MFGH .

Sint ſecundò duæ pyramides AC F & IKM æquè altæ , baſes verò quæcunque polygona FC , KM . Dico eſſe pyramidem ACF ad pyramidem IKM , vt baſis CF ad baſim KM Diuidantur polygona baſium in triangula ductis rectis BD , BE & GO , & plana per has rectas ad vertices coniungantur . Quoniam *h* vt baſis BCD ad BDE ita eſt pyramis ABCD ad piramidem AB DE (eo quod ſunt triangularia, & eiuſdem altitudinis) erit *i* coniungendo vt polygonum CE ad triangulum BDE , ita pyramis ACE ad pyrämidem ABDE . Et rurſus quia, vt baſis BDE ad BEF, ita pyramis triangularis ABDE ad pyramidem ABEF æquè altam : ergo *l* ex compoſitione ordinata vt poligonum CE ad triangulum BEF , ita eſt pyramis ACE , ad pyramidem ABEF; & iterum *m* coniungendo erit, vt polygonum CF ad triangulum BFE , ita pyramis ACF ad pyramidem ABEF. Eadem ratione erit, vt triangulum GKO ad polygonum KM , ita pyramis IKG O ad pyramidem IKM ; Eſt autem *n* vt baſis trianguli BFE ad triangulum GKO , ita pyramis ABFE ad pyramidem IKGO (propterea quod

h par. 1 huius. *i prop. 14. l. 3.* *l pr. 19. li. 3.* *m prop. 14. l. 3.* *n par. 1 huius.*

 alti-

altitudines ambarum pyramidum triangularium æquales ſunt ex hypotheſi). Ergo *o* ex compoſitione ordinata ratio polygoni CF ad polygonum KM eadem erit, quæ pyramidis ACF ad pyramidem IKM. Quod erat, &c.

o pr. 19 lib. 3.

PROPOSITIO XXVI. *In cono dato poſſibile eſt pyramidem circunſcribere, & alteram inſcribere, ità vt illarum differentia à cono minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Vocentur huiuſmodi pyramides* Adſcriptæ *cono*. Tabula VII. Figura 14.

Sit conus cuius vertex B, baſis circulus A, & qualibet magnitudo X Dico poſſe circunſcribi, & inſcribi in dato cono duas pyramides, quarum differentia à cono minor ſit magnitudine X. Ad *a* planum cuiuſlibet trianguli DEF eleuetur perpendicularis CF, quæ *b* fiat æqualis altitudini coni BA, & ductis planis compleatur pyramis CDFE. iam ſi à C per rectam FG ſecantem *c* triãgulum FDE bifariam ducatur planum, *d* ſecabitur pyramis CDFE bifariam, & ſi rurſus alıud planum à C per FH ſecantem triangulum FGE bifariam ducatur, erit pyramis CGFE ſecta bifariam, & cùm hoc ſemper fieri poſſit: manifeſtum

a prop. 6. huius
b pr. 3. lib. 1.
c ex pr. 30. l. 2.
d ex pr. 24. hu.

eſt

eſt *e* relinqui ex ea tandem aliquam pyramidem minorem quacunque magnitudine X: Sit illa CHFE; *f* poſtea circulo A circunſcribatur polygonum regulare KMN, & aliud OPQ illi ſimile inſcribatur ità vt illorum differentia minor ſit baſe FHE; *g* & ductis planis per omnia latera polygonorum ad verticem B, deſcriptæ erunt duæ pyramides, habentes communem verticem B, quarum baſes KMN, & OPQ, ideoque eiuſdem altitudinis cum cono, & pyramide CFHE. Et quoniam omnia latera polygoni OPQ ſecant circulum A, & omnia latera figuræ KMN tangunt circulum A: Ergo *h* plana omnia pyramidis BOPQ conum ſecabunt, & omnia plana pyramidis BKMN extra conum cadent ideoque pyramis BOPQ inſcripta, & minor erit cono BA, & pyramis BKMN circunſcripta, & maior erit cono BA. Et quoniam, *i* vt pyramis BKMN ad pyramidem BOPQ, cùm ſint eiuſdem altitudinis, ita eſt baſis KMN ad OPQ. Ergo *l* diuidendo vt differentia pyramidum BKMN, & BOPQ ad pyramidem BOPQ ita erit differentia polygonorum KMN & OPQ ad polygonum OPQ: Rurſus vt *m* pyramis BPQ ad pyramidem CFHE, cum ſint eiuſdem altitudinis, ità eſt baſis OPQ ad baſim FHE. Ergo *n* ex con-

e ex pr. 27. l. 2.
f prop. 9. l. 5.
g po. 1. huius.
h prop. 19. hu.
i pr. 25. huius.
l prop. 13. l. 3.
m prop. 25. hu.
n pr. 19 lib. 3.

compoſitione ordinata, vt differentia pyramidum BKMN, & BOPQ ad pyramidem CFHE, ita eſt differentia polygonorum KMN, & OPQ ad planum FHE: ſed differentia polygonorum KMN, & OPQ plano FHE minor eſt: Ergo *o* differentia pyramidum BKMN, BOPQ minor eſt pyramide CFHE; ſed hæc pyramis minor erat magnitudine X: Ergo differentia pyramidum BKMN, & BOPQ adhuc minor erit magnitudine X; Eſt verò conus BA maior pyramide inſcripta BOPQ & minor pyramide circunſcripta BKMN. Quare exceſſus, quo pyramis BKMN ſuperat conum; aut defectus, quo pyramis BOPQ deficit à cono, multo minor erit, quàm differentia pyramidum BKMN, & BOPQ; ideoque minor quacunque data magnitudine X. Quod propoſitum fuerat.

o ex pr. 16. l. 3.

PROPOSITIO XXVII. *Coni eiuſdem altitudinis ſunt inter ſe, vt baſes.* Tab. VII. Fig. 15.

EVCL. 11. XII.

Sint duo coni, quorum baſes circuli A & B; vertices verò F, H, & eorum altitudines FG, HO, æquales ſint. Dico conum FA ad conum HB eandem rationem habere, quam circulus A ad circulum B. Adſcribantur *a* cono FA duæ pyramides FCDE, & FKMN quarum differen-

a pr. 26 huius.

tia à cono minor ſit quacunque magnitudine propoſita. Poſtea *b* circulo B circunſcribatur polygonum regulare PRS ſimile polygono CDE; Pariterque eidem inſcribatur polygonum regulare TVX ſimile polygono KMN, & *c* ab omnibus lateribus dictarum figurarum eleuentur plana ad verticem H pertingentia, vt perficiantur duæ pyramides, altera HPRS circunſcripta, *d* & maior cono HB, altera verò HTVX inſcripta; & ideo minor eodem cono. Et quoniam tam pyramides circunſcriptæ, quàm inſcriptæ altitudines FG, HO æquales habent, *e* erunt inter ſe, vt baſes; ſed *f* circunſcripta polygona baſium CDE, PRS ſunt inter ſe in duplicata ratione radiorum ſiue vt *g* circuli A, B: Pariterque polygona KMN & TVX ſunt inter ſe, vt circuli A & B: Ergo; *h* vt pyramis FCDE ad pyramidem HPRS, ità erit circulus A ad circulum B; & in eadem ratione erit pyramis FKMN ad pyramidem HTVX. Ergo ſunt duæ magnitudines, prima conus FA, ſecunda conus HB, & ratio data circuli A ad circulum B, & duæ aliæ vnà maiores prima, & ſecunda, ſcilicet pyramides FCDE, HPRS conis circunſcriptæ ſunt in ratione A ad B, & exceſſus à prima, ſcilicet differentia pyramidis FCDE à cono

b ex pr. 4. l. 5.

c p3. 1. huius.

d ex pr. 19. hu.

e prop. 25. hu.

f prop. 10. l. 5.

g pr. 12. l. 5. et pr. 7. l. 3

h prop. 7. l. 3.

FA minor minor eſt quacunque magnitudine data; pariterque duæ aliæ vna minores prima, & ſecunda, ſcilicet pyramides FKMN & HTVX conis inſcriptæ, ſunt in eadem ratione A ad B, & defectus à prima, ſcilicet differentia pyramidis FKMN à cono FA minor eſt quacunque data magnitudine. Ergo *i* prima ad
i ex pr. 24. l. 3. ſecundam, ſcilicet conus FA ad conum HB eſt quoque in eadem data ratione circuli A ad circulum B, baſis ad baſim. Quare, &c.

EVCL. 7. XII. et 28. 29. 30. 31. XI. PROPOSITIO XXVIII. *Si pyramis, & priſma æquales baſes, & æquales altitudines habuerint, erit pyramis tertia pars priſmatis. Et duo priſmata æquales baſes & altitudines æquales habentia æqualia ſunt inter ſe.* Tabula VII. Fig. 16. 17.

Sit priſma DBF, & pyramis KGHM, quarum altitudines ſint æquales, & baſes ABC & GHM ſint pariter æquales. Dico pyramidem ipſius priſmatis tertiam partem eſſe. Et primò ſit priſma triangulare, & in tribus eius parallelogrammis ducantur diametri DC, AE & CE, & per duas quaslibet diametros in
a poſt. 1. huius. vno puncto conuenientes *a* plana ducantur, vt priſma diuidatur in
b pr. 23. 24. ibu. tres pyramides, quarum duæ *b* CBAE & CADE æquales ſunt inter ſe,
c pr. 26. lib. 1. quia *c* baſes BAE, DEA ſunt æqua-

les,

les, cùm parallelogrammum DB à diametro AE bifariam ſecetur, & altitudo earum eſt eadem, ſcilicet eadem perpendicularis à communi vertice C ad planum DB ducta: Pari ratione duæ pyramides EDAC, & EDFC habent baſes æquales DAC, & DFC & eandem altitudinem, ſcilicet perpendicularem à vertice E ad planum FDAC ductam; Ergo *d* pyramis EDFC æqualis eſt eidem pyramidi EDAC: ideoque tres pyramides, in quibus priſma reſoluitur æquales inter ſe ſunt; & propterea priſma DBF triplum erit pyramidis EABC: Eſt verò *e* pyramis KGHM æqualis pyramidi EABC (cum eorum baſes GHM & ABC ſint poſitæ æquales, & etiam altitudines æquales). Ergo pyramis KGHM tertia pars eſt priſmatis DBF. *d pr. 23 et 24. huius.* *e pr. 23 24. hu.*

Secundò in priſmate polygonio diuidantur *f* baſes polygonæ parallelæ, æquales, & ſimiles AC, & DF in totidem triangula, ita vt duo quælibet oppoſita ſimilia parallela & æqualia ſint, vt ABP ſimile & æquale ſit ipſi DES, PBO ipſi SER, &c. & *g* ductis planis per latera homologa æqualia, & parallela PB, SE, & per OB & RE diuiſum erit priſma DBF in totidem priſmata triangularia, quot ſunt triangula ABP, PBO, OBC in baſi AC. Et ſi ad verticem E ducantur plana *f ex pr. 17. l. 4.* *g poſt. 1 huius.*

per

per rectas AP, PO, OC, PB, OB, erit pyramis EAC polygonia diuiſa in totidem pyramides triangulares, quot ſunt triangula in baſi AC; & proptereà tot erunt pyramides triangulares EABP, EPBO, EOBC quot ſunt priſmata triangularia DBS, SBR, RBF, & erunt priſmata, & pyramides deſcriptæ ſuper eaſdem baſes triangulares, & in eiſdem altitudinibus. Vnde (ex prima parte huius) pyramis triangularis EABP tertia pars erit priſmatis triangularis DBS, pariterque pyramis EPBO erit tertia pars ipſius priſmatis SBR, nec non pyramis EOBC ipſius priſmatis RBF tertia pars erit; ideoque tota pyramis polygoni EAC totius priſmatis polygoni DBF tertia pars erit: Sed *h* pyramis KGHM æqualis eſt pyramidi EAC (quia baſes AC, & GHMN æquales poſitæ ſunt, & eorum altitudines æquales). Ergo pyramis KGHM tertia pars eſt priſmatis DBF. Tandem ſi fuerint duo priſmata æquè alta ſuper æquales baſes ex hac propoſitione, quodlibet eorum triplum erit eiuſdem pyramidis æquè altæ ſuper eadem baſi deſcriptæ ergo priſmatà æqualia erunt inter ſe. Quod erat, &c.

h pr. 25 huius et ex prop. 10. l. 3.

EVCL. 10. XII. PROPOSITIO XXIX. *Si coni, & cylindri baſes, & altitudines æquales*

les inter ſe fuerint, erit conus tertia pars cylindri; Et duo quilibet cylindri baſes & altitudines æquales habentes, ſunt æquales interſe. Tabula VII. Fig. 18.

Sit conus EA, & cylindrus CB, ſiue recti ſiue non, quorum baſes circuli A, B ſint æquales, pariterque eorum altitudines æquales ſint inter ſe. Dico conum EA tertiam partem eſſe cylindri CB. Adſcribantur *a* cono EA duæ pyramides ED, FG & EHIK, quarum differentia à cono minor ſit quacunque data magnitudine: & circulo B adſcribantur *b* duo polygona OPQ & RVS ſimilia regularibus polygonis DFG & HIK. Patet *c* circunſcripta polygona DFG, OPQ æqualia eſſe, eo quod ſunt inter ſe vt quadrata radiorum, ſeu vt circuli æquales A, B, eadem ratione æqualia erunt inſcripta polygona HIK & RSV. Poſtea latera cylindri SLQM transferantur tranſuersè ſemper ſibi ipſis æqui diſtanter per omnia latera polygonorum RSV & NOPQ inter plana parallela circulorum C & B quouſque compleantur priſmata; quæ æquè alta erunt, ac conus AE & cylinder BC; & illorum plana lateralia quæ per circulum tangentes N OPQ ducuntur *d* tangent cylindri ſuperficiem & ideo priſma circumſcriptum & maius erit cylindro CB;

a prop. 26. hu.

b ex pr. 4. l. 5.

c pr. 10. 12. l. 5. et ex pr. 16. l. 3.

d prop. 19. hu.

&

& plana lateralia quæ per circulum ſecantes RSV ducuntur cylindrum BC ſecabunt & ideo priſma RSVL inſcriptum & minus erit cylindro BC

Iam quoniam ſunt duæ magnitudines prima conus EA, ſecunda cylindrus CB, & ratio data ſubtripla, & pyramis EFGD conſcripta, & maior ipſo cono exceſſu minori quacunque magnitudine propoſita, ad priſma MOPQ quod circũſcriptũ, & maius eſt cylindro CB, eandem rationem datam ſubtriplam *e* habet (eo quod altitudines, & baſes æquales inter ſe habent) ideoque pyramis EFGD maior eſt quam ſubtripla cylindri CB. Et rurſus pyramis EHIK inſcripta, & minor cono EA defectu minore quacunque magnitudine propoſita, ad priſma RVSL inſcriptum, & minus cylindro CB eandem rationem datam *f* ſub triplam habet, ideoque pyramis EHIK minor eſt parte tertia cylindri CB: Ergo *g* prima ad ſecundam, ideſt conus EA ad cylindrum CB erit in ratione data ſubtripla. Eſt ergo conus EA tertia pars cylindri CB. Tandem ſi fuerint duo cylindri æquè alti ſuper æquales baſes conſtituti, ex hac propoſitione, quilibet eorum triplus erit coni eiuſdem æquè alti ſuper eadem baſi deſcripti. Quare cylindri æquales erunt inter ſe, vt propoſitum fuerat.

e pr. 28. huius.

f pr. 28. huius.

g ex pr. 24. l. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXX. *Si prisma, aut cylindrus ſecetur plano aduerſis baſibus parallelo. erunt priſmata, vel cylindri ſecti inter ſe, vt eorum latera, & vt eorum altitudines.* Tabula VII. Figura 19. EVCL. 25. XI. 13.14. XII.

Sit priſma, vel cylindrus DA, cuius latus AD, & altitudo CE, & ſectum ſit plano G parallelo baſibus aduerſis A, D, à quo ſecetur altitudo CE in I & latus AD in G. Dico ſolidum AG ad ſolidum DG eandem rationem habere, quam habet altitudo CI ad altitudinem IE, & quam latus AG habet ad latus GD, ſi tamen comparentur ea, quæ eiuſdem ſunt ſpeciei, ſcilicet priſmata inter ſe, & cylindri inter ſe. Secetur *a* altitudo IE in quotcunque partes æquales IB, BX, XE, & *b* in recta IC producta ſecentur quotcunque partes IM, MP, PS ſingulæ æquales XE, ita vt *c* recta IS ſit qualibet partes ipſius IE. Poſtea *d* per puncta S, P, M, B, X plana ducantur parallela baſibus D & G, tam in cylindro, quam in priſmate. Et quoniam priſma vel cylindrus AD ſecatur planis Q, N, K, G, Z, T baſibus parallelis: Ergo *e* figuræ Q, N, K, G, Z, T ſimiles, & æquales ſunt figuræ D, & inter ſe, & ſunt altitudines EX, XB, BI, IM, MP, PS æquales inter ſe: Ergo *f* omnia priſmata in-

a pr. 28. l. 1.
b prop. 3. lib. 1.
c Def. 3 lib. 3.
d ex pr. 10. hu.
e pr 17. huius.
f pr. 28 29. hu.

ter:

ter ſe; vel omnes cylindri QN, NK, KG, GZ, ZT, TD æquales erunt inter ſe, & tot numero ſunt, quot ſunt æquales altitudines SP, PM, M
g def. 6. lib. 3. I, IB, BX, XE: Ergo *g* eędem partes erit priſma, vel cylindrus QG ipſiu priſmatis, vel cylindri GD, ac eſt partes altitudo SI ipſius IE. Et quoniam ſunt quatuor quantitates, prima altitudo CI, ſecunda altitudo IE, tertia priſma, vel cylindrus AG, & quarta priſma, vel cylindrus DG, & duæ aliæ quantitates altitu-
h def. 8 lib. 3. do SI & priſma vel cylindrus QG, quæ *h* eandem, & quamlibet rationem commenſurabilem habent ad conſequentes; nam quælibet partes eædem ſunt, SI quidem ipſius ſecundæ IE, & ſolidum QG ipſius quartæ ſolidi GD (comparando ſemper priſmata inter ſe, & cylindros inter ſe): Et quotieſcunque
i pr. 28. 29. hu. SI æqualis eſt primæ CI, *i* neceſſariò ſolidum QG æquale eſt ſolido AG (quoniam eandem baſim G, & æquales altitudines habent perpendiculares à puncto C ad planum G) & quoties SI maior fuerit, quàm
l ex pr. 28. 29. huius. CI, *l* neceſſariò ſolidum QG maius erit ſolido GA, & quotieſcunque SI minor fuerit, quàm CI, neceſſariò ſolidum QG minus erit ſolido
m prop. 23. l. 3. GA: Ergo *m* prima quantitas CI ad ſecundam IE eandem rationem habebit, quam tertia, quæ eſt ſolidum

AG

AG ad quartam, ſcilicet ad ſoli dum GD. Quare vt altitudo CI ad altitudinem IE, ita erit priſma AG ad priſma GD, vel cylindrus AG ad cylindrum GD. Tandem quoniam duæ rectæ lineæ CE & AD ſecantur à planis D, G & A parallelis inter ſe: Ergo *n* vt CI ad IE, ita eſt AG ad GD. Quare vt ſolidum AG ad ſolidum GD, ità eſt illius latus AG ad huius latus GD. Quapropter. &c. *n pr. 17. huius.*

PROPOSITIO XXXI. *Quælibet duo priſmata, cylindri, pyramides, aut coni proportionem habent compoſitam ex rationibus baſium, & altitudinum.* Tabula VII. Fig. 20. 21.

Sint duo priſmata, vel cylindri, aut pyramides, vel certè duo coni AB, CD, quorum baſes B, D, & altitudines ſint FE, GO. Dico ſolida eiuſdem ſpeciei, ſcilicet priſmata inter ſe, & cylindros inter ſe, atque pyramides inter ſe, nec non conos habere proportionem compoſitam ex ratione baſis B ad baſim D, & ex ratione altitudinis FE ad altitudinem GO. Et ſi quidem AB, CD fuerint pyramides, aut coni, fiant *a* ſuper eiſdem baſibus, & in eiſdem altitudinibus priſmata, aut cylindri AB, CD, & è contra, ſi fuerint priſmata aut cylindri, fiant *b* ſuper eiſdem baſibus, & in eiſdem altitudi- *a def. 13. 14. 14. 2. h. b def. 2. ſecunda hu.*

di-

dinibus pyramides, aut coni AB, C
c pr. 3. lib. 1. D; poſtea *e* ſecetur altitudo IO æ-
qualis altitudini FE, & ducatur *d*
d ex pr. 10. hu. planum IH parallelum baſi D, effi-
e. pr. 17. huius. ciens *e* figuram H æqualem, & ſimi-
lem baſi D, vt ſit HD priſma, *f* vel
f def. 13 14. 1. 2. ſecund. huius. cylindrus; vel certè punctum aliquod
H fiat vertex pyramidis, aut coni
HD. Et quia duæ pyramides, aut duo,
coni AB, HD æquales altitudines ha-
g pr. 25 27. hu. bent. Ergo *g* ſunt inter ſe, vt baſes B
D: ſed tam pyramides, quàm coni æ-
què metiuntur priſmata, & cylin-
h pr. 28 29. hu. dros AB, HD, cùm *h* quodlibet ſo-
lidum correſpondentis ſolidi eiuſ-
i pr. 11. et 7. l. 3 dem ſpeciei tertia pars ſit: Igitur *i*
priſma, aut cylindrus AB ad ipſum
HD habet eandem proportionem,
quam baſis B ad baſim D. Poſtea,
quia priſma, vel cylindrus CD ſe-
catur plano H aduerſis baſibus pa-
l pr. 30. huius. rallelo: Ergo priſmata *l* HD & C
D, aut cylindri inter ſe ſunt, vt al-
titudines IO, GO; ſed tam priſma-
ta, quam cylindri æquè multiplices
ſunt pyramidum, vel conorum H
m pr. 28 29. hu. D, CD, cum *m* quodlibet ſolidum
correſpondentis eiuſdem ſpeciei ſo-
n pr. 11. et 7. l. 3 lidi triplum ſit: igitur *n* pyramis,
vel conus HD ad eiuſdem ſpeciei
ſolidum CD eandem proportionem
habet, quam altitudo IO ad altitu-
o pr. 19 lib. 3. dinem GO: eſt verò *o* proportio
ſolidi AB ad ſolidum CD compoſi-
ta ex rationibus intermedijs, ſcili-

cet

cet ex ratione ſolidi AB ad HD, & ex ratione HD ad CD (comparando ſemper ea, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt); atque eſt ſolidum AB ad HD, vt baſis B ad D, & ſolidum HD ad CD eſt, vt altitudo IO, vel *p* ei æqualis FE ad altitudinem GO: Ergo *q* ſolidum AB ad eiuſdem ſpeciei ſolidum CD habet proportionem compoſitam ex ratione baſis B ad baſim D, & ex ratione altitudinis FE ad altitudinem GO. Quod erat oſtendendum.

p pr. 3. lib. 3.

q pr. 19. lib. 3.

Corollarium Patet, quod priſmata, & cylindri æqualium altitudinum, ſunt inter ſe, vt baſes: & pyramides: aut coni æqualium baſium ſunt inter ſe, vt altitudines. Oſtenſa enim fuit proportio priſmatum, vel cylindrorum AB, HD æqualium altitudinum eadem, ac eſt proportio baſium B, D; atque proportio pyramidum HD & CD habentium æquales baſes eadem fuit ac habent altitudines IO & GO.

EVCL. 32. XI. et 11.14 XII.

PROPOSITIO XXXII. *Aequalium piramidum, conorum, priſmatum, cylindrorum, reciprocantur baſes, & altitudines; & quorum baſes, & altitudines reciprocantur, æquales ſunt inter ſe.* Tab. VII. Fig. 22. 23.

EVCL. 34. XI. 9.15. XII.

Sint primò æquales inter ſe duæ pyra-

pyramides, vel coni, aut priſmata, aut cylindri AB & CD, quorum baſes B, D, & altitudines AE, CF. Dico, vt baſis B ad D, ita eſſe reciprocè altitudinem CF ad altitudinem AE. Sint duæ quælibet figuræ M & N æquales inter ſe, & vt B ad D, ita ſit M ad O. Et quoniam ſicut M æqualis eſt N, ita ſolida AB & CD æqualia ſunt inter ſe (dummodo ſemper ea comparentur, quæ eiuſdem generis ſunt); & æqualitatis proportio *a* ſolidi AB ad ſolidum CD componitur ex rationibus baſis B ad baſim D, & altitudinis AE ad altitudinem CF; Eſt verò M ad O, vt B ad D: *b* Ergo reſidua proportio O ad N eadem eſt, quæ altitudinis AE ad altitudinem CF; & *c* inuertendo N ad O eſt, vt CF ad AE; ſed *d* N ad O eſt, vt M ad O (eo quod M & N æquales ſunt). Ergo *e* altitudo CF ad altitudinem AE eandem rationem habet, quam baſis B ad baſim D.

a pr. 31 huius. *b pr. 21 lib. 3.* *c pr. 9. lib. 3.* *d prop. 3. lib. 3.* *e prop. 7. lib. 3.*

Secundò in omnibus dictis ſolidis (comparando ſemper ea, quæ eiuſdem ſunt ſpeciei) ſit baſis B ad D reciprocè vt altitudo CF ad altitudinem AE. Dico ſolida ipſa æqualia eſſe inter ſe. Quoniam *f* æquales M & N ad eandem O eandem rationem habent, & eſt B ad D, vt M ad O & CF ad AE eſt, vt B ad D, ſeu, vt M ad O: Ergo CF ad

f pr. 3. lib. 3.

g AE eſt vt N ad O, & inuertendo AE *h* ad CF eſt, vt O ad N; ſed *i* proportio M ad N componitur ex rationibus M ad O & O ad N: Ergo proportio M ad N componitur ex rationibus B ad D & AE ad CF. Eſt verò proportio *l* ſolidi AB ad ſolidum CD compoſita ex iiſdem rationibus baſis B ad baſim D, & altitudinis AE ad altitudinem CF: Ergo *m* vt M ad N, ita eſt ſolidum AB ad ſolidum CD; ſed erat M æqualis N. Ergo ſolidum AB æquale eſt ſolido CD. Quod erat, &c.

g prop. 7. lib. 3. *h pr. 9. lib. 3.* *i prop. 19. l. 3.* *l pr. 31. huius.* *m prop. 19 lib. 3*

PROPOSITIO XXXIII. *Si fuerint duæ pyramides, vel duo priſmata, quorum baſes ſint triangula, vel parallelogramma, & habeant unum angulum ſolidum contentum à media trium proportionalium æqualem angulo ſolido contento à tribus proportionalibus: erunt ſolida, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, æqualia inter ſe.* Tab. VII. Figura 24

EVCL. 36. XI.

Sint anguli ſolidi B & E æquales inter ſe, & angulus B contineatur à tribus rectis proportionalibus AB, CB, DB, & angulus E contineatur à tribus FE, GE, HE æqualibus mediæ CB trium proportionalium, & compleantur triangula ABD, FEH, atque parallelogramma KB, ME. Dico primò pyramides, quarum

rum vertices C & G, baſes verò triangula ABD & FEH, vel parallelogramma KB & ME æquales eſſe inter ſe. A terminis *a* C, G ſublimium æqualium BC & EG homologarum cadant perpendiculares C N GO ad ſubiecta plana: Erunt perpendiculares CN, & GO æquales inter ſe eo quod ſi intellectu aptè applicetur angulus ſolidus B ſuper E congruet angulus planus ABD ſuper angulum FEH; & ſic quoque reliqui anguli plani. Quare ſublimis CB cadet ſuper GE, & ob earum æqualitatem ſibi mutuocongruent, & conuenient puncta C, G igitur CN, GO perpendiculares ad congruentia ſubiecta plana, & conuenientes in vno puncto C, vel G, ſibi mutuo congruent, & ideo æqualeſerunt. Et quoniam anguli A BD & FEH æquales ſunt inter ſe, & eſt AB ad FE, ita reciprocè HE ad DB: Ergo *b* triangula ABD & FEH æqualia ſunt inter ſe, pariterque parallelogramma KB & ME æqualia erunt inter ſe, & altitudines CN, GO etiam æquales: erunt pyramides *c* CABD & GFHE inter ſe pariterque pyramides CBK, GME æquales.

a pr. 6. huius.

b prop. 14. l. 4.

d pr. 23 24. hu.

Secundò ijſdem poſitis. Dico priſmata, quorum latera CB, GE, & baſes triangula ABD & FEH, vel parallelogramma KB & ME eſſe

æqua-

ualia inter ſe. Quoniam prædi-
priſmata altitudines habent æ-
iles ipſis CN & GO æqualibus;
oque æquè alta erunt, & baſes A
) & FEH æquales ſunt, nec non
'es KB & ME. Ergo *f* prædicta
ſmata æqualia inter ſe erunt.
ıod erat, &c.

f prop. 29. hu.

ROPOSITIO XXXIV. *Si hemiſ-
phærium, & conus rectus, æquales
axes, & baſes habentes, ſecentur
planis parallelis baſibus, & æquè re-
motis à centro ſphæræ & vertice coni,
& ſuper ſectionibus, & ſuper circulo
baſis coni, vel hemiſphærij ſolida
æquè alta deſcribantur: ſectiones ge-
nitæ circulares ſimul ſumptæ æquales
erunt circulo baſis hemiſphærij, vel
coni; & ſolida ipſa erunt cylindri æ-
quales cylindro ſuper circulo baſis co-
ni, vel hemiſphærij deſcripto eiuſdem
altitudinis.* Tabua VII. Fig. 25.

Sit hemiſpherium BCD, & co-
rectus FGH, quorum circuli
ium A & E ſint æquales, & axes
& EF perpendiculares ad plana
culorum A, E, ſint etiam æqua-
, & per puncta M & O æquè re-
ta à centro ſphæræ A, & à vertice
ni F ducantur plana KL & PQ
allela baſibus A & E. Dico primò
ıras PQ & KL ſimul ſũptas æqua-
eſſe circulo A. Et patet ſectionẽ
ıi PQ parallelam plano circuli

O baſis

a prop. 16.hu. baſis E *a* eſſe circulum. At in ſphę-
ra quia axis BA perpendicularis eſt ad vnum planorum æquidiſtantium
b prop. 9.huius CD *b* erit quoq; perpendicularis ad reliquum KL; & ideo *c* anguli AM
c prop. 2.huius K, AMN recti erunt, & reliqui acuti in triangulis AMK, AMN, in quibus latera AK, AN ſunt æqua-
d pr. 16 lib. 4. lia (cum ſint radij ſphæræ) & latus AM eſt commune. Ergo triangula
d prop. 8. l. 4. & ex 16. l. 3. erunt ſimilia, & ideo *d* latera KM, NM æqualia erunt, & omnes aliæ rectæ à puncto M eductæ in figura KMN. Quare talis figura erit circulus. Et quoniam *e* in triangulo
e prop. 18. l. 5. rectangulo AMK duo circuli à radijs KM & MA deſcripti æquales ſunt circulo à radio KA deſcripto; æſtque circulus A, vel E æqualis circulo radij KA, eo quod rectæ AK, AC, EG æquales ſunt, atque circulus radij AM æqualis eſt circulo PQ radij FO, ſeu radij PO ei æquali (eo quod triangulum POF ſimile eſt iſoſcelio GEF). Igitur circulus A, vel E æqualis eſt duobus circulis KL, & PQ ſimul ſumptis.

Secundo, ſuper circulos A, E, PQ & KL deſcribantur cylindri æquæ alti CXD, ZGH, VPQ & RKL. Dico cylindrum XCD, vel ZGH æqualem eſſe duobus cylindris RKL & VPQ ſimul ſumptis. Nam altitudines XC, vel ZG & RK, VP

æqua-

æquales factæ ſunt: Ergo *f* cylindri XCD, RKL, VPQ erunt vt baſes; & eſt baſis circulus A, vel E æqualis duobus circulis KL & PQ ſimul ſumptis. Igitur *g* cylindrus XCD, vel ZGH æqualis eſt duobus cylindris RKL & VPQ ſimul ſumptis, vt propoſitum fuerat.

f ex pr. 31. hu.

g ex pr. 22. et ex pr. 16. lib. 3.

PROPOSITIO XXXV. *Si hemiſpharium, conus rectus, & cylindrus æquales axes, & baſes habuerint, poſſunt adſcribi hemiſphærio, & cono figuræ gradatæ ex cylindris æquè altis compoſitæ, ita vt circunſcriptæ, ſimul ſumptæ, maiores ſint dato cylindro exceſſu minore quocunque dato; & duæ inſcriptæ, ſimul ſumptæ, minores ſint dato cylindro defectu minore quocunque dato.* Tabula VII. Figura 26.

Sit hemiſphærium ABC, conus rectus DEF, & cylindrus IHKR, quorum baſes A, G, D ſint circuli æquales, & altitudines perpendiculares AC, DF, IH ſint æquales inter ſe. Debent adſcribi, imperatæ figuræ. Secetur *a* latus IH cylindri bifariam in M, ducaturque *b* planum MN parallelum baſi G. Manifeſtum eſt *c* cylindrum IMN dimidium eſſe totius cylindri IHK; & ſi rurſus latus IM bifariam ſecetur in O, ducaturque planum per O parallelum baſi G: ſimiliter erit cylin-

a prop. 9. l. 1.

b ex pr. 10. hu.

c prop. 29. hu.

 drus

drus RIO dimidium cylindri IMN;
& ſi hæc bipartitio,& productio planorum æquidiſtantiũ baſi G ſemper
d ex pr. 27. l.2. repetatur *d* relinquentur tandẽ cylindrus aliquis,qui minor erit quacunq; magnitudine propoſita. Ponatur igitur poſtremus cylindrus RIO minor
e prop.9 lib. 1. et ex pr. 10.hu. quacunque magnitudine data. Et *e* MH bifariam ſecetur in Q, ducaturque planum parallelum baſi & addatur in directum cylindrus PIR æqualis cylindro RIO; ſeceturque
f prop. 28. l.1. *f* tam altitudo AC, quàm DF in tot partes æquales in punctis S, T, V, X, Z, Y, in quot ſecta fuit IH.
g prop. 1. l. 3. Patet *g* partes AV, FY æquales eſſe cuilibet QH, & inter ſe (eò quod æquè multiplices earum AC, DF & IH æquales ſunt inter ſe). Eadem ratione reliquæ partes VT, TS, SC, YZ, ZX, XD, QM, MO, OI, IP æquales inter ſe erunt. Deinde
h ex pr. 10.hu. *h* per puncta diuiſionum ducantur plana parallela baſibus A & D, quæ
i prop. 34.hu. *i* circulos efficient tam in hemiſpherio, quàm in cono, quorum circulorum radij ſunt Sα, Tβ, Vλ, Xι, Zθ, Yπ: & *l* ſuper circulo radij Sα
l def.19 2. hu. deſcribantur duo cylindri recti, quorum altitudines SC & ST, eorumque ſemiſectiones per axim ſint parallelogramma rectangula Cα, Tα: eſtque parallelogrammum Cα circunſcriptum ſegmento SCα circuli maximi BC, eo *m* quod contin-
m prop. 21. l.2.

gens

gens à puncto C cadit; extra circulũ BC; parallelogrãmũ verò Tα inſcriptum eſt fruſto SαβT eiuſdẽ circuli, cùm *n* latus oppoſitũ, & æquale ipſi Sα minus ſit, quàm Tβ, eo quod Tβ minùs diſtat à centro A circuli BC, quàm Sα. Et quia altitudines SC, ST æquales ſunt, & baſis communis, *o* cylindrus circunſcriptus ſegmento ſphæræ, cuius ſemiſectio per axim eſt Cα, erit æqualis cylindro inſcripto, cuius ſemiſectio eſt Tα. Eodem modo ſuper reliquos circulos radiorum Tβ, Vλ, Xι, Zθ, Yπ deſcribantur bini cylindri, quorum vnus extra ſolidum cadens æqualis erit reliquo intra ipſum cadenti, eo quod ſunt omnes æquè alti, & bini quilibet communem baſim habent. Vnde vniuerſa figura gradata, ex cylindris æquè altis compoſita, cuius ſemiſectio per axim SαβλA, quæ eſt in ſcripta hemiſphærio, æqualis erit figuræ gradatæ circunſcriptæ abſque infimo cylindro, cuius ſemiſectio per axim CαβλV. Similiter figura gradata ex cylindris æquè altis compoſita, cuius ſemiſectio per axim DιθλY inſcripta cono æqualis oſtendetur figuræ gradatæ circunſcriptæ abſq; infimo cylindro, cuius ſemiſectio per axim XιθπF. Quapropter binæ figuræ gradatæ inſcriptæ hemiſphærio, & cono, ſimul ſumptæ, æquales erunt

n pr. 26 lib. 1. et pr. 18 l. 2.

o ex pr. 29. hu.

O 3 dua-

duabus figuris gradatis circunſcriptis hemiſphærio, & cono abſque duobus infimis cylindris, quorum ſemiſectiones VB & XE. Et quoniam puncta V, Y æquè recedunt à centro ſphæræ A, & à vertice coni F recti cylindri p æquè alti, quorum ſemiſectiones per axim parallelogramma Aλ, & Zπ, ſimul ſumpti, æquales erunt cylindro QHK; propterea quod altitudines æquales ſunt, & circulus baſis G æqualis eſt duabus baſibus à radijs Vλ, & Yπ deſcriptis. Eadem ratione duo cylindri, quorum ſemiſectiones Vβ, & Xθ æquales erunt cylindro QM N; & duo cylindri quorum ſemiſectiones Tα, Dι æquales erunt cylindro OMN. Quare duæ figuræ gradatæ inſcriptæ hemiſpherio, & cono, quarum ſemiſectiones Aλβα S & Yπθι D ſimul ſumptæ, æquales erunt cylindro OHK; ſed eiſdem figuris inſcriptis æquales erant duæ figuræ gradatæ circunſcriptæ hemiſphærio, & cono abſque infimis cylindris, quorum ſemiſectiones Cα βλV & XιθπF. Ergo duæ figuræ gradatæ circunſcriptæ hemiſphærio, & cono abſque infimis cylindris, æquales erunt cylindro OHK. At q infimus cylindrus circa ſphæram, cuius ſemiſectio BV, æqualis eſt cylindro OIR, propterea quod baſes, & altitudines æquales ſunt: pariterque

p pr. 34 huius.

q ex pr. 29. hu.

que

: infimus cylindrus circa conum; us ſemiſectio EX æqualis eſt cydro PIR: Igitur duæ figuræ gra:æ circunſcriptæ hemiſphærio, & no, quarum ſemiſectiones Cαβλ λ, & DE ιθπ F; ſimul ſumptæ |uales erunt cylindro PHK; eſte cylindrus PIR exceſſus cylini PHK ſupra cylindrum IHK, que cylindrus PIR minor erat ıacunque data magnitudine. Igiır duæ figuræ gradatæ circunſcripe hemiſphærio ABC, & cono DE , ſimul ſumptæ, ſuperant cylinrum datum IHK exceſſu minore uacunque data magnitudine; Et uæ figuræ gradatæ inſcriptæ hemiſhærio ABC, & cono DEF, quæ :quales erant cylindro OHK, deiciunt à cylindro IHK defectu OI R minore quacunque data magnituline. Quod fieri poſſe oſtendendum erat.

PROPOSITIO XXXVI. *Sphæra quadrupla eſt coni recti, & ſexquitertia cylindri cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, axis verò æqualis radio ſphæræ.* Tab. VII. Fig. 27. *Arch. de sphæ et cyl. l. 1. p. 32*

Sit ſphæra ABCD, cuius circulus maximus per centrum E ductus ſit AC, & conus FHG & cylindrus NKLO, ſingulę quorũ baſes M, & Q ſint æquales circulo E, & axes MG BE, QR ſint æquales, & perpendicula-

culares ad plana baſium Q, E & M. Dico ſphæram ABCD quadruplam eſſe coni recti FHG & ſexquitertiam eſſe cylindri NKL *b* deſcribantur circa hemiſphærium ABC, & circa conum FHG duæ figuræ gradatæ ex cylindris æquè altis compoſitæ, quarum ſemiſectiones per axim ſint R & S, ita vt, ſimul ſumptæ, maiores ſint cylindro NKLO exceſſu INO minori quacunque data magnitudine: pariterque hemiſphærio, & cono inſcribantur duæ figuræ, quarum ſemiſectiones X & Z, quæ minores ſint cylindro NKLO defectu PNO minori quacunque data magnitudine. Et quoniam ſunt duæ magnitudines, prima cylindrus NKLO, ſecunda eſt hemiſphærium ABC, vna cum cono FGH, & duæ aliæ magnitudines in ratione æqualitatis, ſcilicet cylindrus IKL, & duæ figuræ gradatæ, ſimul ſumptæ, quarum ſemiſectiones R & S quæ ſunt vnà maiores prima, & ſecunda, (nam figuræ gradatæ circumſcriptæ, quarum ſemiſectiones R & S maiores ſunt hemiſphærio vnà cum cono), & cylindrus IKL maior eſt cylindro NKLO exceſſu IN O minore quacunque data magnitudine: pariterque ſunt duæ aliæ magnitudines ſcilicet cylindrus PKL, qui æqualis eſt duabus figuris gradatis inſcriptis, quarum ſemiſectiones

b pr. 35 huius.

X &

X & Z, & ſunt vnà minores prima, & ſecunda; eſtque defectus cylindri PKL à prima, ſcilicet à cilindro NKLO minor quacunque magnitudine data: Ergo *c* prima ad ſecundam, ideſt cylindrus NKLO ad hemiſphærium ABC vnà cum cono FGH eandem rationem æqualitatis habet. Eſtque *d* cylindrus NKLO triplus coni FHG æqualem baſim, & altitudinem cum illo habentis: Igitur *e* hemiſphærium ABC vnà cum cono FGH ad conum EGH triplam proportionem habet; Et *f* diuidendo hemiſphærium ABC ad conum FGH duplam proportionem habebit: Eſtque ſphæra ABCD dupla hemiſphærij ABC: Ergo ſphæra ABCD quadrupla eſt coni FGH. Et conus FGH tertia pars eſt cylindri NKL. Igitur ſphæra ABCD ad cylindrum NKL ſe habet vt quatuor ad tria vt erat &c.

c ex pri. 24. l. 3.
d prop. 29. hu.
e prop. 3. lib. 3.
f pr. 13. lib. 3.

PROPOSITIO XXXVII. *Pyramides, priſmata coni, cylindri ſimiles, & ſphæræ in triplicata ſunt ratione homologorum laterum, vel ſuorum axium* Tabula VII. Figura 28. 29. 30 31.

EVCL. 33. XI. 8. 12. 16 XII.

Sint duæ pyramides, aut priſmata, aut coni, aut cylindri ſimiles, aut duæ qualibet ſphæræ ABCD & FGHK, quarum latera homologa, ſeu axes AB & FG. Dico ſolidum ad ſimile ſolidum triplicatam

habere proportionem lateris, ſeu axis A B, ad latus, ſeu axim *a prop. 6. hu.* F G. Demittantur *a* à ſummitatibus ſolidorum ad plana baſium perpendiculares AM & FN, quæ altitudines eorum determinabunt. Et ex latere homologo FG ſecto F *b pr. 9. huius.* E æquali AB, & ducto *b* plano EO *c prop. 16. hu.* I parallelo baſi GHO, erit *c* pyramis vel priſma ſectum FEOI æquale & ſimile ipſi ABDC, & latus F E ſeu ei æquale AB ad FG eandem rationem habebit quam altitudo F S ſeu ei æqualis A M ad altitudinem FN: Cumque propter ſimilitudinem triangulorum, vel parallelogrammorum CBA, KGF ſit, vt A *d prop. 10. l. 3* B ad BC, ita FG ad GK: Ergo *d* *e prop. 7 lib 3.* permutando vt AB ad FG, ſeu, *e* vt altitudo AM ad altitudinem FN, ita eſt BC ad GK. In conis verò, & *f def 22. 2. hu.* cylindris, quoniam *f* propter ſimilitudinem ſolidorum, vt axis AB ad axim FG, ita eſt diameter CD *g pr. 11 lib. 3.* circuli baſis ad diametrum HK, ſeu *g* radius BD, ad radium HG, & anguli ABD & FGK æquales ſunt: pariterque anguli ad M & N recti: *h ex pr. 4. l. 4* Ergo *h* triangula ABM & FGN ſi*i pr. 4. lib. 4.*milia ſunt; Quare vt *i* axis AB ad axim FG, ita eſt AM, altitudo eiuſdem ſolidi, ad FN altitudinem alterius ſolidi. Patet ergo, quòd in omnibus prædictis ſolidis ſimilibus, vt eſt latus, vel axis AB ad latus, ſeu

ſeu axim FG, ita eſt altitudo AM ad altitudinem FN; & ita pariter eſt BD ad GH, quæ ſunt latera homologa polygonorum baſium, vel ſemidiametri circulorum baſium BD & GK dictorum ſolidorum & quoniam *l* ſolida, quæ eiuſdem ſpeciei ſunt, ideſt coni inter ſe comparati, &c. proportionem habent inter ſe compoſitam ex proportione baſium BCD & GKH, & ex ratione altitudinum AM & FN: Eſt verò *m* proportio duplicata lateris, ſeu ſemidiametri CB ad latus, ſeu ſemidiametrum GK eadem, quæ baſis B CD ad ei ſimilem baſim GKH; ſed vt CB ad GK, ita eſt AB ad FG: Ergo *n* proportio duplicata lateris, ſeu axis AB ad latus, ſeu axim FG, eadem eſt, quæ baſis BDC ad baſim GHK; Poſtea ſimpla proportio A B ad FG eadem eſt, quæ altitudinis AM ad altitudinem FN: Ergo proportio ſolidi ABCD ad ſolidum F GHK componitur ex duplicata proportione, & rurſus ex ſimpla ipſius AB ad FG; Hæc *o* verò triplicata proportio eſt lateris, vel axis AB ad FG. Quare ſolida ſimilia ABCD & FGHK triplicatam proportionem habent laterum homologorum, ſiue axium AB ad FG.

l prop. 31. hu.

m prop. 17. lib. 4 et prop. 12 l. 5.

n prop. 7. l. 3.

o prop. 19. l. 3.

In ſphæris autem ACBD & FH GK intelligantur circunſcripti cylindri recti ML & NO, quorum ba-

ſes MP & NR æquales ſint maximo
ſphæræ circulo, & altitudines LP
& OR æquales diametro eiuſdem
ſphæræ. Et quoniam cylindri ML
& NO ſimiles ſunt, (eo quod ſunt
recti, & eandem æqualitatis ratio-
nem habet axis AB ad axim FG,
quam MP diameter circuli ſuæ baſis
p part. ad NR diametrum baſis alterius:
prima Ergo *p* cylindrus ML ad cylindrum
huius. NO proportionem triplicatam ha-
bet axis AB ad axim FG; Eſt verò
q ex prop 36. *q* cylindrus ML ſeſquialter ſphæræ
huius. ACBD; Pariterque cylindrus NO
r prop. ſeſquialter ſphæræ FHGK: Ergo *r*
12. l. 3 permutando vt cylindrus ML ad cy-
ſ parte lindrum NO, ideſt *ſ* vt triplicata
prima proportio axis AB ad axim FG, ita
huius. eſt ſphæra ABCD ad ſphæram FH
GK. Quod erat oſtendendum.

Finis Libri ſexti.

LIBER VII.

De quinque corporibus regularibus. EVCL. XIII.& XIV.

DEFINITIONES.

I. *CVIVSLIBET recta linea quadratum vocetur eius Potentia: Et proportio quadratorum quarunlibet linearum, vocetur earundem linearum proportio potentialis, vel in potentia.*

II. *SOLIDA figura in ſphæra inſcribi dicitur, & ſphæra circunſcribi figuræ ſolidæ, quando omnes anguli ſolidæ figuræ tangunt ſuperficiem ſphæra.*

III. *SOLIDA figura ſphæræ circunſcribi dicitur, & ſphæra inſcribi dicitur in figura ſolida quando omnia plana figuræ ſolidæ tangunt ſuperficiem ſphæræ.*

PROPOSITIO I. *In data ſphæra figuram ſolidā ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contentam, inſcribere. Vocetur autem talis figura* Tetraedrum. Tabula VIII. Figura I. EVCL. 13. XIII.

In ſphæra ABCD, cuius axis AC, circulus maximus ABCD, inſcribenda eſt figura imperata. Secetur *a* CE, quæ tertia pars ſit axis AC, & in plano circuli ABC ex E eleuetur E B *b* perpendicularis ad axim, & EO perpendicularis ad planum per AE, B ex-

a pr. 28. lib. 1.
b pr. 10. lib. 1.

B extenſum; erit viciſſim AC perpendicularis ad ambas EB, EO; & ideo *e* ad planum per eas ductum; quod in ſphæra efficiet *d* circulum BGDF, & *e* in eo inſcribatur triangulum æquilaterum BGF, iunganturque rectæ AB, AF & AG. Oſtendendum eſt figuram ABFG eſſe quæſitam. Quoniam *f* in ſemicirculo ABC, rectæ lineæ CA, AB, AE proportionales ſunt; vt *g* recta CA ad AE, ita erit quadratum ex CA ad quadratum ex AB; & ita erit quadratum ex BA ad quadratum ex AE; ſed *h* vt recta AE ad EC, ita eſt quadratum ex AE ad quadratum ex EB. Igitur *i* ex compoſitione ordinata erit, vt AC ad CE tertiam partem eius, ita quadratum AB ad quadratum EB; & *l* propterea quadratum ipſius AB triplum eſt quadrati ipſius EB; ſed *m* quadratum ipſius FB, ſcilicet lateris trianguli æquilateri, inſcripti circulo BD, triplum eſt quadrati radij eius EB. Ergo *n* quadrata rectarum AB, & BF æqualia ſunt inter ſe; & *o* propterea rectæ AB & BF æquales erunt. Eadem ratione tam recta AF, quàm AG æqualis erit eidem FB, ſeu BG, vel FG; & propterea *p* quatuor triangula ABF, AFG, AGB & BGF æquilatera erunt & inter ſe æqualia. Et hæc comprehendunt ſolidam figuram *q* deſ-

c pr. 2. et 4. lib. 6. *d pr. 34 lib. 6.* *o pr. 3. lib. 5.* *f ex pr. 10. l. 4.* *g ex pr. 17. lib. 4* *h ex pr. 9. & pr. 17. l. 4.* *i pr. 19. lib. 3.* *l def. 8. lib. 3.* *m p. 30. lib. 5.* *n pr. 4. lib. 3.* *o ex pr. 17. l. 4.* *p pr. 1. et 4. l. 1* *q def. 2 huius.*

deſcriptam intra ſphæram ABCD, quod imperatum fuerat. Vocetur dicta figura ABFG *Tetraedrum*.

Corollarium. Diameter ſphæræ poteſtate ſeſqui altera eſt lateris inſcripti tetraedri. Nam facta eſt CA ſeſquialtera ipſius AE, & vt CA ad AE; ita oſtenſum eſt in hac propoſitione quadratum ipſius CA ad quadratum AB lateris Tetraedri.

PROPOSITIO II. *In data ſphæra ſolidam figuram ſub octo triangulis æquilateris inter ſe æqualibus contentam inſcribere. Vocetur autem talis figura* Octaedrum. Tabula VIII. Figura 2. EVCL. 14. XIII.

Sit data ſphæra ABCD, cuius centrum E. Deſcribi debet intra eam figura imperata. Ducantur *a* tres diametri AC, BD, FG ad inuicem perpendiculares, & coniungantur rectæ AB, AF, AD, AG, CB, CF, CD & CG. Quoniam in tribus triangulis AEB, AEF, BEF communia latera EB, AE & EF ſunt æqualia, radij nimirum ſphæræ; Suntque anguli AEB, AEF & BEF æquales, cum radij AE, BE, FE ad inuicem perpendiculares ducti ſint. Igitur *b* iſoſcelium triangulorum baſes AB, AF, FB æquales ſunt inter ſe; & propterea *c* triangulum ABF æquilaterum erit. Simili

a pr. 10 lib. 1.

b pr. 4. et 5. l. 1.

c pr. 1. lib. 1.

mili ratione reliqua omnia triangula BAG, GAD, DAF, FCB, BCG, GCD, DCF æquilatera erunt; & *d* ſunt inter ſe æqualia, cùm bina quælibet triangula habeant latera communia. Igitur figura ſolida ABCDGF intra ſphæram deſcripta comprehenſa erit ſub octo triangulis æquilateris, & inter ſe æqualibus, & hoc erat faciendum. Vocetur huiuſmodi figura ſolida *Octaedrum*.

d pr. 4 lib. 1.

Corollarium Conſtat ſphæræ diametrum poteſtate duplam eſſe; Et radium ſphæræ poteſtate ſemiſſem eſſe lateris octaedri.

Nam in quolibet triangulo ABC *e* rectangulo in ſemicirculo ABC, in quo duo latera AB, BC æqualia ſunt quadratum *f* hypothenuſæ, ſeu diametri ſphæræ AC duplum eſt quadrati lateris AB; & *g* quadratum radij EA, quod eſt quarta pars quadrati AC, erit ſemiſſis quadrati lateris AB.

e pr. 20 lib. 2. *f pr. 18. lib. 5.* *g ex pr. 19. lib. 5.*

EVCL. 15. XIII.

PROPOSITIO III. *In data ſphæra ſolidam figuram inſcribere ſub ſex quadratis æqualibus contentam. Vocetur talis figura*, Cubus. Tabula VIII. Figura 3.

Sit data ſphæra ABDF, cuius centrum G, axis AD. Debet in ea inſcribi figura imperata. Secetur

a recta

a recta GH, quæ media proportionalis ſit inter radium ſphæræ GA eiuſque partem tertiam: erit b eius quadratum tertia pars quadrati ex radio ſphæræ GA, & c fiat GO æqualis GH, atque per duo puncta H & O ducantur duo plana ad axim AD erecta, ſicuti in prima propoſitione huius factum eſt, quæ d efficient circulos BMF, CRE, & in illo e ducantur duæ diametri BF & MN ad ſinuicem perpendiculares, & in altero circulo ducatur f diameter CE parallela ipſi BF, atque R OS parallela ipſi MN, iunganturque rectæ BM, MF, FN, &c. Et quoniam iuncta recta GF in triangulo rectangulo FGH g quadratum radij FG, ſeu GA æquale eſt duobus quadratis FH & HG; & erat quadratum radij AG triplum quadrati ipſius GH: Ergo quadratum ipſius GF ſeu duo quadrata ipſarum FH & HG tripla erunt quadrati ipſius GH; & propterea quadratum ipſius FH duplum erit quadrati ipſius HG; eſtque h quadratum ipſius FM duplum quadrati ipſius FH (eo quod angulus FHM rectus eſt, & FH & HM ſunt radij æquales eiuſdem circuli BF): Igitur quadratum ipſius FM quadruplum erit quadrati ipſius HG; & propterea i recta FM dupla erit ipſius HG. Vnde FM æqualis erit HO. Eadem

a pr. 28. lib. 1. & pr. 10. lib 4.
b ex pr. 17. l. 4.
c pr. 3. lib. 1.
d pr. 34 lib. 6.
e pr. 10. lib. 1.
f cor. pr. 15. l. 1.
g prop. 18. l. 5.
h pr. 18 lib. 5.
i ex pr. 17. l. 4.

dem ratione ſingulæ rectæ FN, N
B &c. æquales erunt eidem HO,
l pr.27. lib.1. ſuntque *l* ſingulæ BC, MR, FE &
NS parallelæ, & æquales eidem H
O, propterea quod coniungunt ter-
m pr.10 lib.2. minos radiorum parallelorum, & *m*
inter ſe æqualium, cùm æqualiter
diſtent à cẽtro circuli maximi ſphæ-
ræ. Igitur duodecim dictæ rectæ
æquales ſunt inter ſe; & quia axis
AD perpendicularis eſt ad rectas M
n pr. 2. lib. 6. N, BF, RS & CE, & ideo *n* ad pla-
na circulorum BFM & CER, & re-
ctæ BC, MR, FE, NS parallelæ
ſunt axi AD; propterea eædem re-
o prop. 4. l. 6. ctæ *o* perpendiculares erunt ad ipſas
BM, MF, FN: &c. atque ad CR,
RE, &c. in planis eorundem circu-
p pr. 20 lib. 2. lorum exiſtentes. Similiter *p* angu-
li NBM, BMF CRE, &c. recti e-
runt, cùm in ſemicirculis conſtitu-
q pr. 34 lib. 1. ti ſint. Quapropter *q* figuræ ſex B
R, RF, FS, SB, BF & CE erunt
quadrata, quæ comprehendunt figu-
ram intra ſphæram deſcriptam.
quod fuit propoſitum. Vocetur ta-
lis figura *Cubus*.

Corollarium Patet ſphæræ diame-
trum poteſtate triplam eſſe lateris
cubi. Nam ſphæræ radius AG fa-
r ex pr. 19. l. 5. & pr. 11. lib. 3. ctus eſt triplus poteſtate ipſius HG,
eſtque AD dupla ipſius AG, atque
latus cubi BC oſtenſum eſt duplum
ipſius HG. Ergo *r* quadratum AD
tri-

triplum eſt quadrati lateris cubi BC.

PROPOSITIO IV. *In data ſphæra ſolidam figuram ſub viginti triangulis æquilateris, & inter ſe æqualibus contentam inſcribere. Vocetur autem tale ſolidum* Icoſaedrum. Tabula VIII. Figura 4. EVCL. 16. lib. XIII.

In ſphæra, cuius axis AB, centrum C, circulus maximus ADBF inſcribi debet figura ſolida imperata. Secetur *a* CI, quæ media proportionalis ſit inter radium ſphæræ AC, eiuſque partem quintam: erit *b* eius quadratum quinta pars quadrati radij ſphæræ AC, & *c* ſecetur MC æqualis ipſi CI, & per I, & M ducantur duo plana, erecta ad axim AB, atque ad circulum ADB (vt in prima propoſitione huius factum eſt) quæ *d* efficient duos circulos DG & EF *e* inter ſe æquales, & *f* parallelos; eo quod iuncti radij DI & EM æqualiter diſtant à centro circuli ADB; Et *g* in eiſdem circulis inſcribantur duo pentagona regularia DHKL & FPON, ita vt anguli D & F in puncta diametraliter oppoſita ſphæræ D & F incidant; & à polis ſphærę A & B ad ſingulos angulos pentagonorũ rectæ iungantur AD, AH, &c. BF, BP, &c. Ducanturque rectæ ND, DO, &c. Oſtendendum eſt viginti triangula, compre-

a pr. 18 l. 1. & pr. 10. lib. 4.
b ex pr 17 lib. 4
c pr. 3. lib. 1.
d pr. 14 lib. 6.
e ex pr. 10. l. 2.
f pr. 9. lib. 6.
g pr. 3. lib. 5.

prehendentia inſcriptam figuram,
æqualia, & æquilatera eſſe. Diui-
h ex pr. 19. l. 2. datur *h* arcus ON bifariam in E;
iunganturque rectæ NE, DE & D
C. Quoniam quadratum radij AC
ſiue DC quintuplum eſt quadrati
i pr. 18. ipſius IC: Suntq; *i* duo quadrata
lib. 5. DI & IC æqualia quadrato radij D
C (propterea quod angulus DIC
l pr. 2. rectus eſt, cùm *l* axis AB perpendi-
lib. 6. cularis ſit ad circulum DG.) Igi-
tur duo quadrata DI & IC quintu-
pla ſunt quadrati ipſius IC; & pro-
pterea quadratum ipſius DI quadru-
plum erit quadrati ipſius IC. Vn-
de *m* recta linea DI dupla erit ipſius
m ex pr 19. l. 5. IC; eſt autem MI dupla eiuſdem
IC. Igitur rectæ DI & MI æqua-
n pr. 10. les ſunt inter ſe; eſtque *n* ME æqua-
lib. 2. lis eidem DI (cùm æqualiter di-
ſtent à centro) Ergo *o* figura DIM
o pr. 34 E cuius angulus I rectus quadratum
lib. 1. eſt, & propterea recta DE æqualis
erit DI radio circuli DHG, ſiue
radio ME; cumque arcus NE ſe-
miſſis ſit arcus NO ſubtenſi à latere
p pr. 3. pentagoni: *p* erit recta NE latus de-
lib. 5. cagoni eiuſdem circuli EOF, cuius
q ex pr. *q* DE latus eſt inſcripti hexagoni,
8. l. 5. cùm ſit æqualis radio circuli ME:
Eſt verò axis AB perpendicularis
ad circulum EOF, atque DE eſt pa-
r pr. 4. rallela ipſi AB; Ergo *r* DE perpen-
ſ pr. 2. dicularis quoque erit ad planum
lib. 6. circuli EOF; & propterea *ſ* ad re-

ctam

ctam EN in eo exiſtentem: Vnde in triangulo DNE erit angulus DEN rectus, & propterea *t* quadratum ipſius DN æquale erit quadrato lateris decagoni NE vnà cum quadrato lateris hexagoni DE eiuſdem circuli NOF: & ideo *u* ND æqualis erit lateri pentagoni NO eiuſdem circuli EOF. Eadem ratione ſingulæ rectæ DO, HO, &c. æquales erunt ſingulis lateribus pentagoni NO, OP, PF, &c. ideoque *x* quinque triangula NDO, OHP, PKF, &c. quorum baſes ſunt quinque latera pentagoni NOPF inter ſe æqualia, & æquilatera erunt. Eadem ratione oſtendentur quinque triangula DOH, HPK, KFL, &c. quorum baſes ſunt quinque latera pentagoni DHKL æquilatera, & inter ſe, & prioribus æqualia. Tandem quoniam AC quintuplũ poteſt ipſius IC, & eſt MI dupla ipſius IC; Ergo *y* MA in I ſecatur extrema, & media ratione, cuius ſegmentum maius erit MI; hoc autem æquale eſt circuli radio ID, ſcilicet *z* lateri hexagoni circuli DG, erit *a* minus ſegmentum AI æquale lateri decagoni eiuſdem circuli: ideoque *b* quadratum ex DA, quod æquale eſt duobus quadratis ex DI & IA (cùm axis AB perpendicularis ſit oſtenſus ad eius radium ID) erit *c* æquale quadrato lateris pentagoni;

t pr. 18. l. 5.

u prop. 32. l. 5.

x pr. 2. & 7. l. 5.

y prop. 26. l. 5.

z ex pr. 8. l. 5.

a ex pr. 8. l. 5.

b pr. 18 l. 5.

c pr. 32 lib. 5.

&

d ex pr. 17. l. 4. & *d* propterea recta DA æqualis erit lateri pentagoni DH circulo DG inſcripti, & ſic reliquæ omnes AH, AK, AL, &c. pariterque BN, BO, BP, &c. erunt inter ſe æquales, & æquales ipſis lateribus DH, HK, e pr. 7. l. 1. KL, &c. Igitur decem *e* triangula vertices in A & B habentia (tot nimirum, quot ſunt latera amborum pentagonorum NOPF &DH,KL) æquilatera ſunt, & inter ſe, & prioribus æqualia. Quapropter viginti triangula comprehendentia ſolidam figuram intra ſphæram deſcriptam, æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia, vt propoſitum fuerat. Vocetur huiuſmodi figura ſolida *Icoſaedrum*.

Corollarium Sphæræ diameter ad latus icoſaedri eſt, vt latus hexagoni cum duplo lateris decagoni ad f ex pr. 8. lib. 5. latus pentagoni. Nam in circulo DG eſt DH latus pentagoni, & *f* radius DI, ſeu ei æqualis IM eſt latus hexagoni; eſtque IM maius ſegmentum rectæ MA diuiſæ extrema, g ibid. & media ratione: Ergo *g* minus eius ſegmentum AI, & ei æqualis MB ſunt latera decagoni eiuſdem circuli DG; & propterea diameter ſphæræ AB ad latus icoſaedri DH erit, vt ſumma lateris hexagoni IM, & dupli lateris decagoni AI ad latus pentagoni DH ab eodem circulo comprehenſorum.

PRO-

PROPOSITIO V. *In data ſphæra figuram ſolidam ſub duodecim pentagonis regularibus inter ſe æqualibus contentam, inſcribere. Vocetur autem talis figura* Dodecaedrum. Tab. VIII. Fig. 5. EVCL. 17. XIII.

Sit ſphæra, cuius circulus maximus ABCD, centrum E. Deſcribi debet intra eam imperata figura. Ducantur *a* tres diametri AC, BD, FH, quæ ſint ad inuicem perpendiculares; *b* & ſecetur EG æqualis radio cubi, ſeu medietati lateris cubi inſcripti in eadem ſphæra: & *c* in plano ABC fiat quadratum EGIK, quod *d* erit tertia pars quadrati ex radio AE; & *e* ſecetur EG in M extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum ſit EM, ſeceturque *f* GN æqualis EM, iungaturque recta NI; & *g* à puncto M ducatur MR parallela ipſi GI, vel EB, ſecans *h* NI productam in R, & KI in X; atque à puncto R ducatur RV parallela ipſi KI, vel EA, ſecans EB in V, & *i* à punctis N, I ad planum BEA eleuentur perpendiculares SIQ, ONP (quæ *l* inter ſe parallelæ erunt, & *m* in eodem plano, in quo recta RN iacet) ſecenturque *n* NO, PN, ſingulæ æquales ipſi GN, vel EM; & SI, QI fiant ſingulæ æquales ipſi EG, coniunganturque rectæ RS, SO PQ, QR: RE, RO, RP, SE, OE, PE, IE.

a pr. 10. lib. 1. et prop. 6. l. 6.
b pr. 3. lib. 1. et ex pr. 3. hu.
c pr. 34. lib. 1.
d ex pr. hu.
e pr. 25. 3. lib. 4.
f prop. 3. l. 1.
g cor pr. 16. l. 1.
h ex pr. 29. l. 1.
i pr. 6. lib. 6.
l pr. 5. lib. 6.
m ex pr. 4. l. 6.
n pr. 3. lib. 1.

Pa-

ex RP æquale eſt tribus quadratis ex MR, ex RX, & ex XM; & *b* ſunt duo quadrata ex iota MR & RX minori ſegmento; rectæ diuiſæ extrema, & media ratione, tripla quadrati ex maiori eius ſegmento MX: Igitur quadratum ex RP quadruplũ eſt quadrati ex MX, ſeu quadrati KG: eſt verò *c* quadratũ ex SQ quadruplũ quadrati KG, eo quod SQ dupla eſt ipſius SI, ſeu IG: Ergo quadrata ex RP, & ex SQ æqualia ſunt, ideoq; rectæ *d* RP, SQ æquales erũt. Eadem ratione RO æqualis erit eidem SQ, & ideo ipſi RP: Quare in pentagono RSP tres rectæ OR, SQ, RP ſubtendentes angulos eius æquales ſunt inter ſe, & *e* intermedia SQ parallela baſi OP ſecat ſubtenſas RP, RO extrema & media ratione, veluti ſecat ipſam RN in I; & maiora earum ſegmenta æqualia ſunt baſi OP, eo quod *f* SQ dupla ipſius SI, vel MN ad OP duplam ipſius NO, vel NG eſt vt MN ad eius maius ſegmentum NG rectæ extrema, & media ratione diuiſæ, & ſunt RO, RP æquales ipſi SQ; & ex ea relinquunt vtrinque portiones æquales; quia IS, IQ æquales ſunt, *g* & eorum portiones inter I, & ſubtenſas RO, RP æquales ſunt, ſicuti æquales ſunt portiones ON, NP rectæ parallelæ ipſi SQ: Igitur *h* pentagonum RSOPQ regulare eſt. Poſtea

b pr. 24 lib. 5.

c ex pr. 19. l. 5.

d ex pr. 17. l. 4.

e prop. 2. & 26 lib. 4.

f pr. 11. l. 3. pr. 26. l. 4. & pr. 3. lib. 3.

g ex pr. 12. l. 4. & ex pr. 16. lib 3.

h ex pr. 7. l. 4.

ſtea quia in triangulo EVR angulus V rectus eſt, quadratum *i* ex ER æquale erit duobus quadratis ex EV, & ex VR, ſeu *l*ex KV, quæ oſtenſa fuit ei æqualis; ſed *l* duo quadrata ex EV, & ex eius minori ſegmento VK tripla ſunt quadrati maioris ſegmenti KE rectæ diuiſæ extrema, & media ratione; Ergo quadratum ex ER triplum eſt quadrati KG. Similiter quia in triangulo E NO angulus N rectus eſt, quadratum ex EO æquale erit duobus quadratis ex EN, & ex NO, ſeu ex ei æquali GN; ſuntque duo quadrata ex EN, & ex minori ſegmento N G ræctæ diuiſæ extrema, & media ratione tripla quadrati ex EG maiori ſegmento; Ergo quadratum ex EO triplum eſt quadrati KG: non ſecus oſtendetur quadratum ex EP triplum quadrati KG: fuit autem quadratum radij ſphæræ EA triplum eiuſdem quadrati KG: Igitur quadrata rectarum ER, EO, EP, & EA æqualia ſunt, & ideo *m* rectæ E R, EO, EP, æquales erunt radio ſphæræ EA; propterea anguli R, C, P in ſuperficie ſphæræ exiſtent. Deinde quia SQ perpendicularis eſt ad planum BEA, *n* erit quoque erecta ad ei contiguā EI exiſtentem in eodem plano; & *o* eſt EI poteſtate dupla ipſius EG, & eiuſdem GE tripla eſt poteſtate ſemidiameter

i pr. 18. lib. 5. et ex pr. 17. l. 4.
l prop. 24. l. 5.
m ex pr 17. l. 4.
n prop. 2. l. 6.
o pr. 18 lib. 5.

ter

ter ſphæræ EA: Ergo EI poteſtate ſubſeſquialtera eſt radij ſphæræ, & ideo *p* EI erit diſtantia lateris cubi à centro ſphæræ; & eſt SQ biſariam ſecta in I, & perpendicularis ad EI, atque eſt dupla ſemilateris cubi EG: Ergo *q* SQ eſt latus cubi inſcripti in ſphæra ABCH, & ideo anguli S, Q pentagoni RSP in ſphæræ ſuperficie exiſtent. Si ergo compleatur inſcriptio cubi in ſphæra, cuius vnum latus eſt SQ; & ab eodem puncto N radij EA ſuper communi baſi OP cõſtruatur aliud pentagonum regulare, & *r* priori æquale, verticem habens verſus D, habebit omnes angulos in ſuperficie ſphæræ, & recta linea ſubtendens angulum pentagoni parallela baſi OP, pari modo applicata erit ſuper latere inſcripti cubi parallelo ipſi SQ.

p ex pr. 3. hu.

q ex pr. 3. hu.

r ex pr. 17. l. 4.

Et ſimiliter in extremitatibus B, C, D, F, & H reliquorum quinque radiorum conſtrui poſſunt bina pentagona, regularia & æqualia habentia angulos in ſuperficie ſphæræ, quorum rectæ ſubtendentes angulos pentagonorum æquidiſtantes baſibus applicatæ erunt reliquis decem lateribus inſcripti cubi; & propterea omnia dicta duodecim pentagona ſe ſe mutuò tangent, tum in eorum lateribus æquidiſtantibus lateribus cubi, quorum vnum eſt OP,

tum in angulis inſcripti cubi, & ideo compoponent ſolidam figuram. Vnde *ſ* inſcripta erit in ſphæra figura ſolida comprehenſa à duodecim pentagonis regularibus, & æqualibus. Quod erat faciendum. Vocetur talis figura *Dodecaedrum*.

ſ Def. 2. huius.

Corollarium Sphæræ diameter ad latus dodecaedri eſt vt latus trianguli æquilateri ad latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

t ex pr. 3. hu

u pr. 30 l. 5.

x prop. 18. l. 4.

Nam *t* quadratum diametri ſphæræ AC triplum eſt quadrati SQ lateris cubi, ſicuti, *u* quadratum lateris trianguli triplum eſt quadrati lateris hexagoni: Ergo *x* vt AC ad SQ, ita eſt latus trianguli regularis ad latus hexagoni; & vt SQ ad OP ſcilicet vt maius ad ſegmentum minus rectæ extrema, & media ratione diuiſæ (vt in hac propoſitione oſtenſum eſt), *y* ita eſt latus hexagoni ad latus decagoni: ergo *z* ex compoſitione ordinata diameter ſphæræ AC ad OP latus dodecaedri erit, vt latus trianguli regularis ad latus decagoni.

y ex pr. 8. lib. 5.

z pr. 19. lib. 3.

SCHOLIVM.

Quod verò præter has quinque regulares ſolidas figuras, effici non poſſit alia, quæ à planis figuris æqualibus æquilateris, & æquiangullis con-

contineatur, ſic oſtendetur.

Ad coſtitutionem anguli ſolidi requiruntur duæ conditiones, *a* prima, vt anguli plani, conſtituentes ſolidum angulum, non ſint pauciores, quàm tres: ſecunda, *b* vt omnes, ſimul ſumpti, minores ſint quatuor rectis. Modò quia *c* angulus trianguli æquilateri tertia pars eſt duorum rectorum, ideſt ſexta pars quatuor rectorum: erunt ſex anguli triãguli æquilateri ſex partes ſextæ quatuor angulorum rectorum; ideoque æquales erunt quatuor rectis: Et propterea *d* plura, quàm quinque triangula æquilatera ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia non conſtituent angulum ſolidum, ſed figuræ planæ regulares, quæ ſpatium ſolidum comprehendere debent, neceſſe eſt, vt angulos ſolidoſ conſtituant. Igitur preter pyramidem, Octaedrum, & Icoſaedrum aliam figuram ſolidam triangula ipſa æquilatera conſtituere non poſſunt.

a def.2 lib.6. *b pr.13. lib.6.* *c ex pr. 18. l. 1.* *d pr.13. lib.6.*

Secundò quia *e* angulus quadrati quarta pars eſt quatuor rectorum, erunt quatuor anguli quadrati æquales quatuor rectis; ideoque *f* plura, quàm tria quadrata ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia angulum ſolidum non efficient. Et propterea præter cubum nullam aliam figuram ſolidam quadrata

e pr.34. lib.1. *f pr.13. lib. 6.*

ipſa conſtituere poſſunt.

g ex pr. 18. l. 1. Tertiò quia *g* angulus pentagoni quinta pars eſt ſex angulorum rectorum, ideſt tres partes decimæ quatuor rectorum: erunt quatuor anguli pentagoni, ſimul ſumpti, æquales duodecim partibus decimis quatuor rectorum, ſcilicet erunt maiores, quàm quatuor recti: Et ideo *h pr. 13 lib. 6.* *h* plura, quàm tria pentagona ad vnum punctum cum ſuis angulis conuenientia non conſtituent angulum ſolidum. Igitur præter dodecaedrum aliam figuram ſolidam pentagona non conſtituent.

i ex pr. 18. l. 1. Quartò quia *i* angulus hexagoni ſexta pars eſt octo angulorum rectorum, ideſt tertia pars quatuor rectorum: erunt tres anguli hexagoni ſimul ſumpti æquales quatuor angulis rectis, & propterea *l pr. 13. lib. 6.* *l* tres anguli exagonales ad vnum punctum conuenientes non conſtituent angulum ſolidum; ideoque hexagona, & ſic reliquæ omnes figuræ planæ regulares, excedentes numerum ſenarium angulorum, ineptæ erunt ad anguli ſolidi conſtitutionem, cùm pauciores, quàm tres anguli plani ſolidum angulum non efficiant; & propterea quælibet figuræ planæ regulares plurium, quàm quinque angulorum corpus aliquod regulare componere nequeunt. Quapropter præter Pyramidem, Octaedrum,

cu-

Cubum, Icoſaedrum, & Dodecaedrum nulla alia figura conſtrui poteſt ex coaptatione planarum figurarum æqualium, & regularium. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO VI. *Circa datam ſphæram quodlibet regulare corpus circunſcribere, & in quolibet ipſorum ſphæram inſcribere.* Tabula VIII. Figura 6.

In ſphæra, cuius centrum H, & axis AC circunſcribi debet quodlibet ex dictis corporibus regularibus. *a* Inſcribatur in ſphæra corpus illius ſpeciei, quod circunſcribi debet; ſitque illud ABFG, & perpendicularis à centro ſphæræ ad planum figuræ BFG, ſiue radius inſcripti ſolidi ſit HE, & per punctum C extremum diametri AC *b* ducatur planum KMN parallelum plano BFG: eritque *c* radius HC perpendicularis quoque ad planum KMN, & ideo *d* omnes rectæ tangent circulos maximos per diametrum AC extenſos; & propterea planum KMN tanget ſphæram. Rurſus in pyramide HBFG producta *e* erit figura diſſecta KMN ſimilis baſi BFG, & omnia latera HN, HM, HK æqualia erunt, cùm eandem rationem habeant ad pyramidis æqualia latera BH, FH, GH eo quod ſunt radij ſphæræ. Eadem ratione ſi ducantur

a pr. 1. 2. 3. 4. et 5. huius

b ex pr. 10. l. 6.

c ex pr. 9. l. 5.

d pr. 2. l. 6. et ex pr. 21. l. 2.

e prop. 16. l. 6.

 pla-

plana contingentia ſphæram parallela baſibus reliquarum pyramidum verticem in centro ſphæræ H habentium, in quæ ſolida figura ABF G reſoluitur, erunt figuræ planæ circunſcriptæ ſimiles figuris inſcriptis, & rectæ omnes à centro ſphæræ H per angulos inſcriptæ figuræ vſque ad externum planũ ductæ erunt æquales inter ſe, & prioribus HK, HM, HN, eo quod *f* eandem rationem habent ad latera æqualia pyramidum in centro ſphæræ verticem habentium, ſeu ad radios ſphæræ, quam habent radij ſphæræ, ſeu figuræ circunſcriptæ ad *g* æquales radios figuræ inſcriptæ. Quare plana omnia ſphæram tangentia in eiſdem punctis K, M, N, R, conuenient; & ideo ſolidam figuram efficient ſimilem ipſi ABFG. Quod erat faciendum.

f. pr. 7. et 4. l. 3

g ex pr. 1. 2. 3. 4. et 5. hu.

Secundò in dato corpore regulari BAFG inſcribi debet ſphæra. Radio HE deſcribatur ſphæra EO. Dico hanc eſſe inſcriptam ſolido; quia radij omnes cuiuſlibet ſolidæ figuræ regularis ſunt æquales inter ſe, vt ex quinque præcedentibus propoſitionibus deducitur. Ergo ſphæra radio HE deſcripta neceſſariò *h* tangit reliqua plana figuræ AB FG; & ideo *i* ſphæra EO inſcripta erit corpori regulari ABFG. Vt fuit propoſitum.

h ex prima par. huius prop.

i def. 3. huius.

Finis.

EVCLIDIS PROPOSITIONES

Iuxta methodum Theonis vulgatam, cum locis huius operis, in quibus eædem Eucl. propoſitiones exponuntur.

Primus numerus indicat librum, ſecundus propoſitionem, Tertius paginam huius reſtitutionis.

LIBER I.

1 SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum conſtituere. lib. 1. propoſit. 1. pagina 8.

2 Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. 1. 2. 10.

3 Duabus datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere. 1. 3. 11.

4 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrunque vtrique, habeant verò & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſin baſi æqualem habe-

bunt, eritque triangulum triangulo æquale, ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. 1. 4. 11.

5 Iſoſcelium triangulorum qui ad baſim ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: & ſi vlterius productæ ſint æquales illæ rectæ lineæ, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe æquales erunt. 1. 6. 15.

6 Si trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia, inter ſe erunt. 1. 20. 33.

7 Super eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. deducitur 1. ex pr. 7. pag. 17.

8 Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrunque vtrique, æqualia, habuerint verò & baſim baſi æqualem: angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt. 1. 7. 17.

9 Datum angulum rectilineum, bifariam ſecare. 1. 8. 18.

10 Datam rectam lineam finitam, bifariam ſecare. 1. 9. 19.

Data

11 Data recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare. 1. 10. 19.

12 Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto quod in ea non eſt, perpendicularem rectam deducere. 1. 11. 20.

13 Cùm recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam, angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet. 1. 12. 21.

14 Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ductæ, eos qui ſunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ. 1. 13. 22.

15 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecuerint, angulos qui ad verticem ſunt æquales inter ſe efficient. 1. Coroll. 5. 15.

16 Cuiuſcunque trianguli vno latere producto, externus angulus vtroque interno & oppoſito maior eſt. 1. Cor. 18. 32.

17 Cuiuſcunque trianguli duo anguli duobus rectis ſunt minores, omnifariam ſumpti. 1. corollar. prop. 18. 32.

18 Omnis trianguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 1. 19. 32.

19 Omnis trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 1. 20. 33. Om-

20 Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora, quomodocunque aſſumpta. 1. 21. 34.

21 Si ſuper trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius conſtitutæ fuerint, hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt. 1. 22. 35.

22 Ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum conſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores, omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta, reliquo ſunt maiora. 1. 23. 36.

23 Ad datam rectam lineam datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere. 1. 24. 37.

24 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſin baſi maiorem habebunt. 2. cor. 2. prop. 6. 63.

25 Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque vtrique, baſin verò baſi maiorem: & angulum ſub æqualibus rectis lineis contentum

tum angulo maiorem habebunt.
2. cor. 2. prop. 6. 63.

26 Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrunq; vtriq; vnumq; latus vni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſeu quod vni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrunque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.
1. 25. 33.

27 Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter ſe fecerit: parallelæ erunt inter ſe illæ rectæ lineæ.
1. 16. 28.

28 Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, aut internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter ſe ipſæ rectæ lineæ.
1. 16. 28.

29 In parallelas rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos inter ſe æquales efficit, & externum interno, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem, & internos & ad eaſdem partes duobus rectis æquales facit. 1. 15. 26.

30 Quæ eidem rectæ lineæ parallela,

lelæ, & inter ſe ſunt parallelæ
1. 17. 30.
31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. 1. cor. 16. 30.
32 Cuiuſcunque trianguli vno latere vlterius producto: externus angulus duobus internis & oppoſitis eſt æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales. 1. 18. 31.
33 Rectæ lineæ quæ æquales & parallelas lineas ad partes eaſdem coniungunt, & ipſæ æquales & parallelæ ſunt. 1. 27. 41.
34 Parallelogrammorum ſpatiorũ æqualia ſunt inter ſe quæ ex aduerſo & latera & anguli: atque illa bifariam ſecat diameter. 1. 26. 39.
35 Parallelogramma ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. 1. 31. 46.
36 Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqaalia. 1. 31. 46.
37 Triangula ſuper eadem baſi conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 1. 32. 48.
38 Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 1. 32.

1. 32. 48.
39 Triangula æqualia ſuper eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta: & in eiſdem ſunt parallelis. 4. ex prop. 1. 147.
40 Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus & ad eaſdem partes conſtituta & in eiſdem ſunt parallelis. 4. ex 1. 147.
41 Si parallelogrammum cum triangulo eandem baſin habuerit, in eiſdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli. 1. cor. 1. prop. 32. 49.
42 Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 1. 33. 50.
43 In omni parallelogrāmo, complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia. 4. 19. 183.
44 Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo. 4. 20. 186.
45 Dato rectilineo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 4. 20. 186.
46 A data recta linea quadratum deſcribere. 1. 34. 51.
47 In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur,

ęqua-

æquale eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur quadratis. 5. 18. 232.

48 Si quadratum quod ab vno laterum trianguli deſcribitur, æquale ſit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, quadratis: angulus comprehenſus ſub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus eſt. 5. ex 29. 252.

LIBER II.

1 Si fuerint duæ rectæ lineæ, ſeceturque ipſarum altera in quotcunque ſegmenta: rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub inſecta & quolibet ſegmentorum comprehenduntur. 4. 1. 149.

2 Si recta linea ſecta ſit vtrunque; rectangula quæ ſub tota & quolibet ſegmentorum comprehenduntur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato. 4. 1. 149.

3 Si recta linea ſecta ſit vtcunque, rectangulum ſub tota & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto ſegmento deſcribitur quadrato. 4. 1. 150.

Si

4 Si recta linea ſecta ſit vtcunque: quadratum, quod à tota deſcribitur, æquale eſt & illis quæ à ſegmentis deſcribuntur quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo. 5. cor. pro. 19. 235.

5 Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum vnà cum quadrato, quod ab intermedia ſectionum, æquale eſt ei quod à dimidia deſcribitur, quadrato. 5. coroll. 22. 140.

6 Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta & adiecta, ſimul cum quadrato à dimidia, æquale eſt quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, cum ex adiecta componitur, tanquam ab vna deſcripto. 5. coroll. 22. 240.

7 Si recta linea ſecetur vtcunque: quod à tota, quodque ab vno ſegmentorum, vtraque ſimul quadrata, æqualia ſunt & illi, quòd bis ſub tota & dicto ſegmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato. 5. corollar. prop. 20. 237.

8 Si recta linea ſecetur vtcunque: re-

rectangulum quater comprehenſum ſub tota & vno ſegmentorum, cum eo, quod à reliquo ſegmento fit quadrato, æquale eſt ei, quod à tota & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato. 5. coroll. 21. 233.

9 Si recta linea ſecetur in æqualia & non æqualia: quadrata quæ ab inæqualibus totius ſegmentis fiunt, duplicia ſunt & eius quod à dimidia, & eius quod ab intermedia ſectionum fit, quadratorum. 5. 23. 240.

10 Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque ſimul quadrata, duplicia ſunt & eius quod à dimidia, & eius quod à compoſita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vnā deſcriptum ſit, quadratorum. 5. 23. 240.

11 Datam rectam lineam ſecare, vt comprehenſum ſub tota & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento fit, quadrato. 4. 25 193.

12 In amblygonijs triangulis, quadratum quod fit à latere angulum obtuſum ſubtendente, maius eſt quadratis quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum comprehen-

hendentibus, pro quantitate re-
ctanguli bis comprehenſi, & ab
vno laterum quæ ſunt circa obtu-
ſum angulum, in quod, cùm pro-
tractum fuerit, cadit perdendi-
cularis, & ab aſſumpta exterius
linea ſub perpendiculari prope
angulum obtuſum. 5. corollar.
28. 250.

13 In oxygonijs triangulis, qua-
dratum à latere angulum acutum
ſubtendente, minus eſt quadratis
quæ fiunt à lateribus acutum an-
gulum comprehendentibus, pro
quantitate rectanguli bis com-
prehenſi, & ab vno laterum, quæ
ſunt circa acutum angulum, in
quod perpendicularis cadit, & ab
aſſumpta interius linea ſub per-
pendiculari prope acutum angu-
lum. 5. cor. 29. 252.

14 Dato rectilineo æquale qua-
dratum conſtituere. 4. 21. 287.

LIBER III.

1 Dati circuli centrum reperire.
2. 1. 54.

2 Si in circuli peripheria duo
quælibet puncta accepta fuerint,
recta linea quæ ad ipſa puncta
adiungitur, intra circulum cadet;
2. 4. 58.

3 Si in circulo recta quædam
linea per centrum extenſa quan-
dam

dam non per centrum extenſam bifariam ſecet: & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Et ſi ad angulos rectos eam ſecet, bifariam quoque eam ſecabit. 2. 2. 56.
4 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecent non per centrum extenſæ, ſeſe mutuò bifariam non ſecabunt. 2. 3. 57.
5 Si duo circuli ſeſe mutuò ſecent, non erit illorum idem centrum. 2. 5. 59.
6 Si duo circuli ſeſe mutuò interius tangant, eorum non erit idem centrum. 2. 5. 59.
7 Si in diametro circuli quodpiam ſumatur punctum, quod circuli centrum non ſit, ab eòque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: maxima quidem erit ea in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum vero propinquior illi quæ per centrum ducitur, remotiore ſemper maior eſt. Duæ autem ſolùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ. 2. 6. 59.
8 Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eòque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: in cauam peripheriam cadentium rectarum li-

linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt. In conuexâ verò peripheriam cadentium rectarum linearum, minima quidem eſt illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur: aliarum autem, ea quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ autem tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ. 2. 6. 59.

9 Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum ipſius eſt circuli. 2. cor. 16. 62.

10 Circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis non ſecat. 2. 7. 63.

11 Si duo circuli ſe ſe intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra, ad eorum centra adiuncta recta linea & producta, in contactū circulorū cadet. 2. 8. 64

12 Si duo circuli ſe ſe exterius contingant, linea recta quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum illum tranſibit. lib. 2. prop. 8. 64.

13 Circulus circulum non tangit

in

in pluribus punctis, quàm vno, ſiue intus ſiuè extra tangat. lib. 2. prop. 9. 65.

14 In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter diſtant à centro. Et quæ æqualiter diſtant à centro, æquales ſunt inter ſe. 2. 10. 66.

15 In circulo maxima quidem linea eſt diameter: aliarum autem propinquior centro, remotiore ſemper maior. 2. 11. 68.

16 Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet, & in locum inter ipſam rectam lineam & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet. Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt, reliquus autem minor. 2. 21. 82.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum. 2. 22. 83.

18 Si circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerint, ad ipſam contingentem perpendicularis erit. 2. 23. 84.

19 Si circulum tetigerit recta quæpiam linæa, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipſi tangenti excicetur, in excitata erit centrum circuli. 2. 23. 84.

In

20 In circulo angulus ad centrum duplex eſt anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 2. 13. 69.

21 In circulo, qui in eodem ſegmento ſunt anguli ſunt inter ſe æquales 2. prop. 14. 71.

22 Quadrilaterorũ in circulis deſcriptorum anguli qui ex aduerſo, duobus rectis ſunt æquales. lib. 2. 15. 73.

23 Super eadem recta linea, duo ſegmenta circulorum ſimilia & inæqualia non conſtituentur ad eaſdem partes. 5. ex 15. 227.

24 Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia. 5. ex 15. 227.

25 Circuli ſegmen to dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 2. 1. 54.

26 In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. lib. 2. 16. 75.

27 In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſunt inter ſe æquales ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant. 2. 17. 77.

28 In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem, maiori, minorem autem, minori. 2. 18. 78.

In

29 In æqualibus circulis, æquales peripherias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. 2. 28. 78.

30 Datam peripheriam bifariam ſecare. 2. ex. 29. 79.

31 In circulo angulus qui in ſemicirculo, rectus eſt: qui autem in maiore ſegmento, minor recto: qui verò in minore ſegmento, maior eſt recto. Et inſuper angulus maioris ſegmenti, recto quidem maior eſt: minoris autem ſegmenti angulus, minor eſt recto. 2. 30. 80.

32 Si circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quædam recta linea circulum ſecans: anguli quos ad contingentem facit, æquales ſunt ijs qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt angulis. 2. 24. 85.

33 Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo. 2. 25. 87.

34 A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo. lib. 2. prop. 26. 88.

35 Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuò ſecuerint, rectangulum comprehenſum ſub ſegmentis vnius, æquale eſt ei, quod ſub ſegmentis alterius comprehenditur rectangulum. 4. 22. 188.

Si

36 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò tangat: quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato. 4. 22. 188.

37 Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eòque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat, ſit autem quod ſub tota ſecante & exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato: incidens ipſa circulum tanget. 4. 22. 188.

LIBER IV.

1 In dato circulo, rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non ſit maior. 2. 12. *69.*

2 In dato circulo, triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 5. 3. 201.

3 Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æ-

quiangulum. 5. 4. 204.
4 In dato triangulo, circulum inſcribere. 5. 6. 208.
5 Circa datum triangulum, circulum deſcribere. 2. ex. 1. 54.
6 In dato circulo, quadratum deſcribere. 5. 3. 201.
7 Circa datum circulum, quadratum deſcribere. 5. 4. 204.
8 In dato quadrato, circulum inſcribere. 5. 6. 208.
9 Circa datum quadratum, circulum deſcribere. 5. 5. 207.
10 Iſoſceles triangulum conſtituere, quod habeat vtrunque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui. 5. cor. 1. 199.
11 In dato circulo, pentagonum æquilaterum & æquiangulum, inſcribere. 5. 3. 201.
12 Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 5. 4. 204.
13 In dato pentagono æquilatero & æquiangulo, circulum inſcribere. 5. 6. 208.
14 Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum, circulum deſcribere. 5. 5. 207.
15 In dato circulo hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inſcribere. 5. 3. 201.
16 In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum & æquiangulum deſcribere. 5. 3. 201.

LIBER V.

1 Si ſint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices, quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. 3. ex. 15. 125.

2 Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æquè multiplex, atque ſexta quartæ: erit & compoſita prima cum quinta, ſecundæ æquè multiplex, atque tertia cum ſexta, quartæ. ex 3. 22. 135.

3 Si ſit prima ſecundæ æquè multiplex, atque tertia quartæ, ſumantur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: erit & exæquo ſumptarum vtraque vtriuſque æquè multiplex, altera quidem ſecundæ, altera autem quartæ. 3. ex. 17. 127.

4 Si prima ad ſecundam, eandem habuerint rationem, & tertia ad quartam: etiam æquè multiplices primæ & tertiæ, ad æquè multiplices ſecundæ & quartæ iuxta quanuis multiplicationem eandem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint. 3. cor. 19. 132.

5 Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 3. ex. 15. 125.

6 Si duæ magnitudines, duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & detractæ quædam ſint earundem æquè multiplices: & reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æquè ipſarum multiplices. ex. 3. 22. 135. & 15. 125.

7 Æquales ad eandem, eandem habent rationem. & eadem ad æquales. 3. 3. 108.

8 Inæqualium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. 3, 2. 106.

9 Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe: & ad quas eadem, eandem habet rationem, eæquoque ſunt inter ſe æquales. 3 4. 110.

10 Ad eandem magnitudinem, rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt, ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. 3. 5. 111.

11 Quæ eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. 3. 7. 113.

Si

12 Si ſint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum ſe habuerint vna antecedentium ad vnam conſequentium, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. 3. 15. 125.

13 Si prima ad ſecundam, eandem habuerint rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerint, quam quinta ad ſextam: prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam, lib 3. prop. 6. pag. 111.

14 Si prima ad ſecundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quarta, prima verò quàm tertia maior fuerit: erit & ſecunda maior quam quarta. Quòd ſi prima fuerit æqualis tertiæ, erit & ſecunda æqualis quartæ: ſi verò minor, & minor erit. lib. 3. cor. 16. 127.

15 Partes, cùm pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent; ita ſumantur. 3 11. 118.

16 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt. lib. 3. prop. 12. 119.

17 Si cõpoſitæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque

 di-

diuiſæ proportionales erunt lib. 3. 13. 121.
18 Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoque compoſitæ proportionales erunt. lib. 3. prop. 14. 123.
19 Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ſe habuerint ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit. 3. 15. 125.
20 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta, quam ſexta, maior. Quòd ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit. ex 3. 19. 130.
21 Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, fueritque perturbata earum proportio, ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit, erit & quarta quam ſexta maior. quòd ſi prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis ſextæ: ſin illa minor, hæc quoque minor erit. ex. 3. 20. 133.
22 Si ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſu-

ſumantur, & ex æqualitate in eadem ratione erunt 3. 19. 130.

23 Si ſint três magnitudines, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. lib. 3. prop. 20. 133.

24 Si prima ad ſecundam, eandem habuerit rationem; quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad ſecundam eandem rationem, quam ſexta ad quartam: etiam compoſita prima cum quinta ad ſecundam eandem habebit rationem, quam tertia cum ſexta ad quartam. 3. 22. 135.

25 Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 3. 16. 126.

LIBER VI.

1 Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita ſe habent inter ſe vt baſes. 4. 1. 146.

2 Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint: quæ ad ſectiones da-

adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela. lib. 4. prop. 2. 150.

3 Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autem angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem quam reliqua ipſius trianguli latera. recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, ea bifariam ſecat trianguli ipſius angulum. 4. 3. 151.

4 Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. lib. 4. prop. 4. 152.

5 Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus & homologa latera ſubtenduntur. 4 5. 154.

6 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt triangula, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur. 4. 6. 155.

Si duo

7 Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò ſimul vtrunque aut minorem aut non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circumquos proportionalia ſunt latera. 4. 8. 157.

8 Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in baſin perpendicularis ducta ſit, quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 4. 9. 158.

9 A data recta linea imperatam partem auferre. 1. 28. 43.

10 Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit. 4. 12. 161.

11 Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire. 4. 10. 160.

12 Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem adinuenire. 4. 11. 161.

13 Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire. 4. 10. 160.

14 Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogram-

morum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 4. 14. 164.

15 Æqualium, & vnum angulum vni æqualem habentium triangulorum reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 4. 14. 164.

16 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum æquale eſt ei, quod ſub medijs comprehenditur rectangulo. Et ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale fuerit ei, quod ſub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. lib. 4. cor. 1. prop. 14. 165.

17 Si tres rectæ lineæ ſint proportionales, quod ſub extremis comprehenditur rectangulum æquale eſt ei, quod à media deſcribitur quadrato: & ſi ſub extremis comprehenſum rectangulum æquale ſit ei quod à media deſcribitur quadrato, illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. 4. cor. 2. 14. 166.

A data

18 A data recta linea, dato rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere. lib. 4. prop. 16. 167.

19 Similia triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum. 4. 15. 166.

20 Similia polygona in ſimilia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter ſe rationem, quam latus homologum ad homologum latus. 4. 17. 180.

21 Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. 4. cor. 16. 180.

22 Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea proportionalia fuerint, ipſæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt. 4. 18. 182.

23 Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent eam, que ex lateribus componitur. 4. 13. 162.

24 In omni parallelogrammo, quę circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti & inter ſe ſunt ſimilia. 4. 19. 183.

25 Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere. 4. 21. 187.

26 Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit & ſimile toti & ſimiliter poſitum communem cum eo habens angulum, hoc circum eandem cum toto diametrum conſiſtit. 4. 19. 183.

27 Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum deficientiumque figuris parallelogrammis ſimilibus ſimiliterque poſitis ei, quod à dimidia deſcribitur, maximum id eſt quod ad dimidiàm applicatur parallelogrammum, ſimile exiſtens defectui. ex 4. 24. 193.

28 Ad datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri rectilineo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non maius eſſe eo quod ad dimidiam applicatur, cùm ſimiles ſint defectus, & eius quod à dimidia deſcribitur, & eius cui ſimile eſſe debet. 4. 24. 192.

29 Ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit paralelogrammo alteri dato. 4. 24. 192.

30 Propoſitam rectam lineam terminatam, extrema ac media ra-

tio-

tione ſecare. 4. 25. 193.

31 In rectangulis, triangulis, figura quævis à latere rectum angulum ſubtendente deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. 5. 18. 232.

32 Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulum compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint etiam parallela, tunc reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur. 4. 7. 155.

33 In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum ipſis peripherijs in quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti illis inſiſtant peripherijs. Inſuper verò & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 5. 21. 218.

LIBER XI.

1 Quædam rectæ lineæ pars in ſubiecto quidem non eſt plano, quædam verò in ſublimi. lib. 6. axioma 4. 259.

2 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò ſecent, in vno ſunt plano: atque triangulum omne in vno eſt plano. 6. ax. 5. 260.

3 Si duo plana ſe mutuò ſecent, communis eorum ſectio eſt recta linea. *6. 1.* 260.

4 Si recta linea rectis duabus lineis ſe mutuò ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. lib. *6.* prop. 2. 261.

5 Si recta linea rectis tribus lineis ſe mutuò tangentibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, illæ tres rectæ in vno ſunt plano. *6. 3.* 263.

6 Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos ſint angulos, parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. lib. *6.* prop. 5. 260.

7 Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta, illa linea quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. *6.* cor. 4. 265.

8 Si duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. *6. 4.* 264.

9 Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano, hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. *6. 7.* 268.

10 Si duæ rectæ lineæ ſe mutò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tan-

tangentes ſint parallelæ, non autem in eodem plano, illæ angulos æquales comprehendent. lib. 6. 10. 272.

11 A dato ſublimi puncto, in ſubiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. 6. 6. 267.

12 Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam excitare. 6. 6. 267.

13 Dato plano, à puncto quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur ad eaſdem partes. 6. c. 5. 266.

14 Ad quæ plana, eadem recta linea recta eſt, illa ſunt parallela. 6. ex. 9. 270.

15 Si duæ rectæ lineæ ſe mutuò tangentes ad duas rectas ſe mutuò tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano parallela ſunt quæ per illas ducuntur plana. 6. 10. 272.

16 Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur, communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 6. cor. 9. 272.

17 Si duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, in eaſdem rationes ſecabuntur. 6. 11. 274.

18 Si recta linea plano cuipiam ad rectos ſit angulos, illa etiam omnia quæ per ipſam plana, ad rectos eidem plano angulos erunt. 6. 4. 264.

Si duo

19 Si duo plana ſe mutuò ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. 6. 8. 269.

20 Si angulus ſolidus planis tribus angulis contineatur, ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores. 6. 12. 275.

21 Solidus omnis angulus minoribus continetur, quam rectis quatuor angulis planis. 6. 13. 276.

22 Si plani tres anguli æqualibus rectis contineantur lineis, quorum duo vt libet aſſumpti tertio ſint maiores, triangulum conſtitui poteſt ex lineis æquales illas rectas coniungentibus. 6. 14. 278.

23 Ex planis tribus angulis, quorum duo vt libet aſſumpti tertio ſint maiores, ſolidum angulum conſtituere. Decet autem illos tres angulos rectis quatuor eſſe minores. 6. 14. 278.

24 Si ſolidum parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana & æqualia ſunt & parallelogramma. 6. 17. 286.

25 Si ſolidum parallelis planis contentum plano ſecetur aduerſis planis parallelo, erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 6. 30. 315.

26 Ad datam rectam lineam eiuſque punctum, angulum ſolidum con-

conſtituere ſolido angulo dato æqualem. *6.* 14. 278.
27 A data recta, dato ſolido parallelis planis comprehenſo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelis planis contentum deſcribere. ex *6.* 14. 278. & ex pro. 18. 288.
28 Si ſolidum parallelis planis cõprehenſum, ducto per aduerſorum planorum diagonios plano ſectum ſit, illud ſolidum ab hoc plano bifariam ſecabitur. lib. *6.* prop. 28. 310.
29 Solida parallelis planis comprehenſa, quæ ſuper eandem baſim, & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in iiſdē collocantur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. *6.* 28. 310.
30 Solida parallelis planis circunſcripta, quæ ſuper eandem baſin & in eadem ſunt altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem reperiuntur rectis lineis, illa ſunt inter ſe æqualia. *6.* 28. 310.
31 Solida parallelis planis circunſcripta, quæ in eadem ſunt altitudine, æqualia ſunt inter ſe. lib. *6.* 20. 318.
32 Solida parallelis planis circunſcripta quæ eiuſdem ſunt altitudinis, eam habent inter ſe rationem, quam baſes. *6.* cor. 31. 319.
33 Similia ſolida parallelis planis cir-

circunſcripta, habent inter ſe rationem homologorum laterum triplicatam. *6.* 37. 331.
34 Æqualium ſolidorum parallelis planis contentorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et ſolida parallelis planis contenta, quorum baſes cum altitudinibus reciprocantur, illa ſunt æqualia. *6.* 32. 319.
35 Si duo plani ſint anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primò poſitis angulos contineant æquales, vtrunque vtrique, in ſublimibus autem lineis quælibet ſumpta ſint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primùm poſiti, ductæ ſint perpendiculares, ab earum verò punctis, quæ in planis ſignata fuerint, ad angulos primùm poſitos adiunctæ ſint rectæ lineæ, hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent. *6.* 15. Lemma ablatum.
36 Si rectæ tres lineæ ſint proportionales, quod ex his tribus fit ſolidum parallelis planis contentum, æquale eſt deſcripto à media linea ſolido parallelis planis comprehenſo, quod æquilaterum quidem ſit, ſed antedicto æquiangulum. *6.* 33. 321.
37 Si rectæ quatuor lineæ ſint propor-

portionales, illa quoque ſolida parallelis planis contenta, quæ ab ipſis lineis & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelis planis comprehenſa, quæ & ſimilia & ſimiliter deſcribuntur, ſint proportionalia, illæ quoque rectæ lineæ portionales erunt. ex *6*. *37*. pag. *331*.

38 Si planum ad planum rectum ſit, & à quodam puncto eorum quæ in vno ſunt planorum perpendicularis ad alterum ducta ſit, illa quæ ducitur perpendicularis, in communem cadet planorum ſectionem. *6*. cor. 5. *266*.

39 Si in ſolido parallelis planis circunſcripto, aduerſorum planorum lateribus bifariam ſectis, educta ſint per ſectiones plana, communis illa planorum ſectio, & ſolidi parallelis plani circunſcripti diameter, ſe mutuò bifariam ſecant *6*. ex. 29. *313*.

40 Si duo ſint æqualis altitudinis priſmata, quorum hoc quidem baſim habeat parellelogrammum, illud verò triangulum, ſit autem parallelogrammum trianguli duplum, illa priſmata erunt æqualia. *6*. ex. 28. *310*.

LIBER XII.

1 Similia quæ ſunt in circulis polygona, rationem habent inter ſe quam deſcripta à diametris quadrata. 5. 10. 216.

2 Circuli eam inter ſe rationem habent, quàm deſcripta à diametris quadrata. 5. 12. 221.

3 Omnis pyramis trigonam habens baſim, in duas diuiditur pyramides non tantùm æquales & ſimiles inter ſe, ſed toti etiam pyramidi ſimiles, quarum trigonæ ſunt baſes, atque in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata dimidio pyramidis totius ſunt maiora. lemma omiſſum.

4 Si duæ eiuſdem altitudinis pyramides trigona habeant baſes, fit autem illarum vtraque diuiſa & in duas pyramidas inter ſe æquales totique ſimiles, & in duo priſmata æqualia, ac eodem modo diuidatur vtraque pyramidum quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque perpetuò fiat: quemadmodum ſe habet vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia quæ in vna pyramide priſmata, ad omnia quæ in altera piramide priſmata, multitudine æqualia. lemma omiſſum.

5 Pyramides eiuſdem altitudinis, qua-

quarum trigonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent quam ipſæ baſes. 6. 25. 303.
6 Pyramides eiuſdem altitudinis, quarum polygonæ ſunt baſes, eam inter ſe rationem habent quam ipſæ baſes. 6. 25. 303.
7 Omne priſma trigonam habens baſim, diuiditur in tres pyramidas inter ſe æquales, quarum trigonæ ſunt baſes. 6. 23. 310.
8 Similes pyramides, quæ trigonas habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione. lib. 6. pr. 3. 331.
9 Æqualium pyramidum & trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus. Et quarum pyramidum trigonas baſes habentium reciprocantur baſes cum altitudinibus, illæ ſunt æquales. 6. 32. 319.
10 Omnis conus tertia pars eſt Cylindri eandem cum ipſo cono baſim habentis, & altitudinem æqualem. 6. 29. 312.
11 Coni & cylindri eiuſdem altitudinis, eam inter ſe rationem habent quam baſes. 6. 27. 308.
12 Similes coni & cylindri, triplicatam habent inter ſe rationem diametrorum quæ ſunt in baſibus. lib 6. pr. 37. 331.
13 Si cylindrus plano ſectus ſit aduerſis planis parallelo, erit quemad-

admodum cylindrus, ad cylindrũ ita axis ad axem. *6.* 30. 315.

14 Coni & cylindri qui in æqualibus ſunt baſibus, eam habent inter ſe rationem, quam altitudines. *6.* 30. 315.

15 Æqualium conorum & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur. Et quorum conorum & cylindrorum baſes cum altitudinibus reciprocantur illi ſunt æquales. *6.* 32. 319.

16 Duobus circulis circum idem centrum conſiſtentibus, in maiori circulo poligonum æqualium, pariumque laterum inſcribere, quod minorem circulum non tangat. lemma omiſſum.

17 Duabus ſphæris circum idem centrum conſiſtentibus, in maiore ſphæra ſolidum polyedrum inſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat. lemma omiſſum.

18 Sphæræ inter ſe rationem habent ſuarum diametrorum triplicatam. lib. *6.* pr. 37. 331.

LIBER XIII.

1 Si recta linea per extremam, & mediam rationem ſecta ſit, maius ſegmentum quod totius lineæ dimidium aſſumpſerit, quintuplum poteſt eius quadrati, quod à to-

à totius dimidia deſcribitur. lib. 5. prop. 27. 247.

2 Si recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplum poſſit, & dupla ſegmenti huius linea per extremam & mediam rationem ſecetur, maius ſegmentum reliqua pars eſt lineæ primùm poſitæ: lib. 5. prop. 27. 247.

3 Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, minus ſegmentum quod maioris ſegmenti dimidiũ aſſumpſerit, quintuplum poteſt eius, quod à maioris ſegmenti dimidio deſcribitur, quadrati. 5. 26. 245.

4 Si recta linea per extremam & mediam rationem ſecta ſit, quod à tota, quodque à minore ſegmento ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod à maiore ſegmento deſcribitur, quadrati: lib. 5. prop. 24. 242

5 Si ad rectam lineam, quæ per extremam & mediam rationem ſecetur, adiuncta ſit altera ſegmento maiori æqualis, tota hæc linea recta per extremam & mediam rationem ſecta eſt, eſtque maius ſegmentum linea primùm poſita. 4. cor. 26. 196.

6 Si recta linea rationalis, per extremam & mediam rationem ſecta ſit, vtrunque ſegmentorum irrationalis eſt linea, quæ dicitur

Reſi-

Reſiduum, omiſſum.

7 Si pentagoni æquilateri tres ſint æquales anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſequuntur, illud pentagonum erit æquiangulum 7. ex. 5. 210.

8 Si pentagoni æquilateri & æquianguli duos qui deinceps ſequuntur angulos rectæ ſubtendant lineæ illæ per extremam & mediam rationem ſe mutuò ſecant, earumque maiora ſegmenta, ipſius pentagoni lateri ſunt æqualia. lib. 5. prop. 7. 210.

9 Si latus hexagoni & latus decagoni eidem circulo inſcriptorum compoſita ſint, tota recta linea per extremam & mediam rationem ſecta eſt; eiuſque ſegmentum maius, eſt hexagoni latus. lib. 5. prop. 8. 211.

10 Si circulo pentagonum æquilaterum inſcriptum ſit, pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & latus decagoni, eidem circulo inſcriptorum. 5. 31. 255.

11 Si in circulo Rationalem habente diametrum, inſcriptum ſit pentagonum æquilaterum, pentagoni latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. omiſſum.

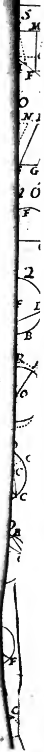
12 Si in circulo inſcriptum ſit triangulum æquilaterum, huius trianguli latus potentia triplum eſt eius

eius lineæ, quæ ex circuli centro ducitur. 5. 30. 253.
13 Pyramidem conſtituere, & data ſphæra complecti, atque docere illius ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris ipſius pyramidis. 7. 1. 335.
14 Octaedrum conſtituere, eaque ſphæra qua pyramidem complecti, atque probare illius ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri. 7. 2. 337.
15 Cubum conſtituere, eaque ſphæra qua & ſuperiores figuras complecti, atque docere illius ſphæræ diametrum potentia triplam eſſe lateris ipſius cubi. lib. 7. prop. 3. 338.
16 Icoſaedrum conſtituere, eademque ſpæra qua & antedictas figuras complecti, atque probare icoſaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ vocatur Minor. lib 7. prop. 4. 341.
17 Dodecaedrum conſtituere, eademque ſphæra qua & antedictas figuras complecti, atque probare dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam, quæ vocatur Reſiduum. 7. 5. 345.
18 Quinque figurarum latera proponere, & inter ſe comparare. 7. ex. cor. 1. 2. 3. 4. 5. à 335. ad 345.
Reliqui duo libri 14. 15. Hypſiclis Aleſandrini de quinque corporibus omiſſi ſunt.

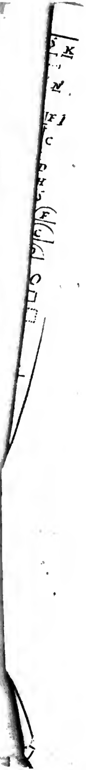
BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE



Google





Google


4
9.
14.



BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google